Министерство образования Московской области

Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение Московской области
« Губернский колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для обучающихся

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ПРЕДМЕТ

ОУП.04 МАТЕМАТИКА

специальность 54.02.01 Дизайн (по отраслям)

форма обучения: очная

Серпухов, 2021 г.

Рассмотрено на заседании
ПЦК физико-математических дисциплин
протокол № 1 от 27 августа 2021 г.

Председатель ПЦК: О.А. Михайлова

Составлено в соответствии с рабочей программой по учебному предмету «Математика»

Разработчик: Моргунова И.В.

Методические рекомендации по выполнению практических занятий по учебному предмету «ОУП.04 Математика» созданы Вам в помощь для успешной работы на занятиях и подготовки к ним. Наличие положительной оценки по практическим занятиям необходимо для получения допуска к экзамену, поэтому в случае отсутствия на уроке по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическое занятие, Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

Ознакомьтесь с общими рекомендациями, чтобы ваша работа была продуктивна и качественно организована.

1. Внимательно прочитайте методические рекомендации по выполнению практической работы.
2. Внимательно прочитайте пояснения, при необходимости повторите лекционный материал по конспектам и другим источникам, относящийся к теме практической работы.
3. Ответьте на контрольные вопросы, если они предложены.
4. Подготовьте все необходимое для выполнения задания, рационально подготовьте рабочее место.
5. Продумайте ход выполнения работы.
6. Если ваша работа связана с использованием ИКТ, проверьте наличие и работоспособность программного обеспечения, необходимого для выполнения задания.
7. Если при выполнении практической работы применяется групповое или коллективное выполнение задания, старайтесь поддерживать в коллективе нормальный психологический климат, грамотно распределить роли и обязанности. Вместе проводите анализ организации и промежуточные результаты практической работы микрогруппы.
8. При выполнении практического задания соблюдайте правила техники безопасности и охраны труда.
9. В процессе выполнения практической работы обращайтесь за консультациями к преподавателю, чтобы вовремя скорректировать свою деятельность, проверить правильность выполнения задания.
10. По окончании выполнения практической работы составьте письменный или устный отчет в соответствии с теми методическими указаниями по оформлению отчета, которые вы получили от преподавателя или в методических указаниях.
11. Сдайте готовую работу преподавателю для проверки.
12. Участвуйте в обсуждении и оценке полученных результатов практической работы .

Программой по учебному предмету «ОУП.04 Математика» предусматривается выполнение практических занятий, направленных на формирование следующих элементов:

умений:

умение 1: умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

умение 2: владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

умение 3: готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

умение 4: владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

умение 5: владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения;

умение 6: целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;

знаний:

знание 1: представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики;

знание 2: понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей;

знание 3: представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;

знание 4: представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

знание 5: основные понятия о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;

знание 6: представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тема лабораторных/практических занятий	Количество часов на выполнение ЛПЗ	Формируемые У, З
Практическое занятие №1. Действия над приближенными числами	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №2. Вычисления с комплексными числами	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №3.Преобразование выражений содержащих степень с натуральным показателем	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №4. Преобразование выражений содержащих корни	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №5. Упрощение логарифмических выражений	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №6. Взаимное расположение прямых и плоскостей	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №7. Изображение пространственных фигур на плоскости	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №8. Действия над векторами в пространстве	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №9. Решение задач	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №10. Комбинаторные конструкции	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №11. Решение задач	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №12. Преобразование простейших тригонометрических выражений	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №13. Нахождение значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №14. Область определения	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №15. Арифметические операции над функциями	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №16. Схема исследования функций	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №17. Двугранный и многогранные углы	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №18. Решение задач	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №19. Решение задач	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №20. Производные основных элементарных функций	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №21. Применение производной к исследованию функций	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №22. Площадь криволинейной трапеции	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №23. Решение задач	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №24. Вычисление вероятности по классическому определению	1	У.1-4,З.1-5

Практическое занятие №25. Решение задач на повторные испытания	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №26. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №27. Решение уравнений методом разложения на множители	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №28. Основные приемы решения уравнений: графический метод	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №29. Показательные и логарифмические уравнения	1	У.1-4,З.1-5
Практическое занятие №30. Методы решения систем уравнений	1	У.1-4,З.1-5

Содержание практических занятий

Раздел 1. Алгебра

Тема 1.1. Развитие понятия о числе

Практическое занятие №1. Действия над приближенными числами
количество часов 1
Цель:
Научиться выполнять вычисления с приближенными числами с учетом погрешностей.
Задачи:
закрепить и систематизировать знания по данной теме; научится находить приближенные значений величин и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной), сравнивать числовые выражения, применять полученные умения и знания на практике.

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию :
1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируют виды погрешностей?
3. Что значит цифра, верная в строгом, широком смыслах?
4. Как находится погрешность округленного числа?
5. Как определить количество верных цифр по абсолютной погрешности.

Задание №1
Дано число x=0,00006 и его приближение x =0,00005. Найти абсолютную и относительную погрешности приближения.
Решение:
$e_x = |0{,}00006-0{,}00005| = 0{,}00001$
$\delta = \frac{0{,}00001}{0{,}00005} = 0{,}2 = 20\%$
Ответ:
абсолютная погрешность 0,00001 и относительная погрешность приближения равна 20%
Задание №2
Найти предельные абсолютные и относительные погрешности числа x = 984,6, если оно имеет только верные цифры в строгом смысле.
Решение:
Цифры числа верны в строгом смысле, если абсолютная погрешность данного числа не превосходит половины единицы разряда, в котором записана последняя верная цифра числа.
$e_x = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05$ (т.к. 6 –последняя верная цифра, стоит в разряде десятых)
$\delta_x = \left|\frac{e_x}{x}\right| \cdot 100\% = \frac{0{,}005}{984{,}6} \cdot 100\% = 0{,}0051\%$
Ответ:
абсолютная погрешность для числа e_x =0,05
относительная погрешность числа δ_x =0,0051
Задание №3
Округляя число x=1,1426 до четырех значащих цифр, определить абсолютную и относительную погрешности полученных приближений. Цифры верны в широком смысле.
Решение:
По определению верной цифры в широком смысле абсолютная погрешность e_x=0,0001

Округлим число x до четырех значащих цифр: x_1=1,143

Погрешность округленного числа равна сумме погрешности исходного числа и погрешности округления:

$\Delta_{окр}$=| 1,143-1,1426| = 0,0004

e_{x1}= 0,0004+0,0001=0,0005

Ответ:

$$\delta_x = \left|\frac{e_{x_1}}{\overline{x_1}}\right| = \frac{0{,}0005}{1{,}143} = 0{,}000437 < 0{,}04\%$$

Задания для практического занятия:

Задание №1.

Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры:

а) в строгом смысле; б) в широком смысле.

№ варианта	а)	б)		№ варианта	а)	б)
1	11,445	2,043		16	112,5	0,04453
2	8,345	0,288		17	0,576	2,5008
3	0,374	4,348		18	25,613	0,0748
4	41,72	0,678		19	0,4223	0,57
5	18,357	2,16		20	112,45	3,4
6	14,862	8,73		21	2,4516	0,863
7	0,3648	21,7		22	5,6432	0,00858
8	0,5746	236,58		23	12,688	4,636
9	5,634	0,0748		24	15,644	6,125
10	20,43	0,576		25	16,383	5,734
11	12,45	3,4453		26	18,275	0,00644
12	2,3445	0,745		27	3,75	6,8343
13	0,5746	42,884		28	26,3	4,8556
14	3,4	0,078		29	43,813	0,645
15	2,4342	0,57004		30	3,643	72,385

Задание №2.

Число x, все цифры которого верны в строгом смысле, округлить до трех значащих цифр. Для полученного результата x1≈x вычислить границы абсолютной и относительной погрешностей. В записи числа x1 указать количество верных цифр по погрешности.

№ варианта	x		№ варианта	x
1	3549		16	9,2038
2	32,147		17	2,3143
3	0,0002568		18	0,012147
4	7,544		19	0,86129
5	198,745		20	0,1385
6	37, 4781		21	23,394
7	0,183814		22	0,003775
8	0,009145		23	718,21
9	11,3721		24	9,73491
10	0,2538		25	11,456
11	10,2118		26	0,1495
12	4,394		27	6,2358

13	0,8437	28	4,4005
14	129,66	29	2,3078
15	48,847	30	3,2175

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Как классифицируют виды погрешностей?
3. Что значит цифра, верная в строгом, широком смыслах?
4. Как находится погрешность округленного числа?
5. Как определить количество верных цифр по абсолютной погрешности.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018 .

Практическое занятие №2. Вычисления с комплексными числами
количество часов 1
Цель:
научиться находить целую и мнимую части, модуль комплексного числа, выполнять арифметические операции с комплексными числами (сложение и вычитание, умножение и деление), а также возведение мнимой единицы в степень, решать квадратные уравнения в комплексных числах.
Задача:
закрепить и систематизировать научиться находить целую и мнимую части, модуль комплексного числа, выполнять арифметические операции с комплексными числами (сложение и вычитание, умножение и деление), а также возведение мнимой единицы в степень, решать квадратные уравнения в комплексных числах, применять полученные умения и знания на практике.

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:

Основные понятия.

1.Комплексным числом называется число вида z = x +i y, где x и y – действительные числа, i – мнимая единица, то есть число квадрат которого равен – 1, x – действительная часть, y – мнимая часть, если x = 0, то число z = i y чисто мнимое. Запись $z = x + i$ алгебраическая форма записи числа.
2. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ называются равны- ми ($z_1 = z_2$) тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.
3. Два комплексных числа вида $z = x + iy$ и $z = x - iy$ называются сопряжёнными.
4. Всякое комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой М (x,y) плоскости Oxy и, наоборот, каждую точку М(x,y) координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z = x + iy$. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Комплексное число $z = x + iy$ можно также изобразить в виде радиус-вектора $\overline{r}=\overline{OM}$.

5. Длина вектора $r = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа.
6. Угол φ, образованный вектором ОМ с положительным направлением оси Ох называется аргументом комплексного числа: $\varphi = Arg\, z$. Аргумент комплексного числа величина многозначная $Arg\, z = arg\, z + 2\pi k$, где $arg\, z$ – главное значение аргумента.– $\pi < arg\ z \le \pi$ (или $[0,\ 2\pi)$). Угол φ таков, что $\cos\varphi = \frac{x}{y}$; $\sin\varphi = \frac{y}{r}$.
7. Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z вида $z = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$;
8. Произведением комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексноечисло $z = (x_1x_2 – y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$;
9. Разностью комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное чис-ло z такое, что $z_2 + z = z_1$, откуда находим $z = z_1 – z_2 = (x_1 – x_2,\ y_1 – y_2)$.
10.Частным комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число z такое, что $z_2 \cdot z = z_1$

Отсюда находим
$$z = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},\ \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

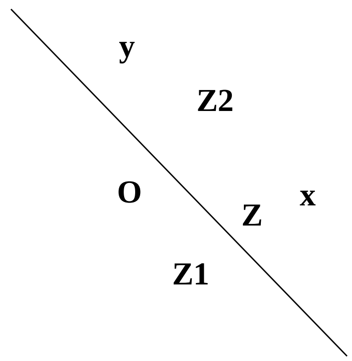
Задание №1

Исходные данные:

1 Даны комплексные числа $z_1 = 1 – 2i$ и $z_2 = 1 + i$. Вычислить $z = z_1 + z_2$аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а также $z_1 - z_2$; $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

Решение:

а) Вычислим сумму аналитически и графически: $z = z_1 + z_2 = 1 - 2i + 1 + i = 2 - i$

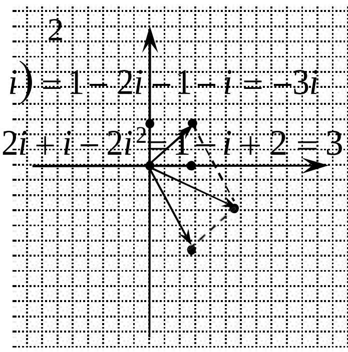


б) Найдем модуль z: $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2}$ $\sqrt{4+1}$ $\sqrt{5}$

в) Вычислим аргумент:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r};\quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow tg\,\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$\varphi = -arctg\,\frac{1}{2}$$



г) Найдем $z_1 - z_2 = 1 - 2i - (1 + i) = 1 - 2i - 1 - i = -3i$

д) Вычислим $z_1 \cdot z_2 = (1 - 2i)(1 + i) = 1 - 2i + i - 2i^2 = 1 - i + 2 = 3 - i$

е)Найдём

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-i+2i^2}{1-i^2} = \frac{1-3i-2}{2} = \frac{-1-3i}{2} = -0{,}5-1{,}5i$$

Ответ:

$z = 2 - i$

$r = \sqrt{5}$

$\varphi = -arctg0.5$

$z_1 - z_2 = -3i$

$z_1 \cdot z_2 = 3 - i$

$\frac{z_1}{z_2} = -0{,}5 - 1i$

Задания к практической работе.

1	$z_1 = 5 - i$ $z_2 = 1+3i$	2	$z_1 = 5 + i$ $z_2 = 1-2i$	3	$z_1 = 5+2i$ $z_2 = 2-i$
4	$z_1 = 3-4i$ $z_2 = 1+i$	5	$z_1 = 3 + i$ $z_2 = 5-2i$	6	$z_1 = 4+5i$ $z_2 = 1-2i$
7	$z_1 = 1-5i$ $z_2 = 1+4i$	8	$z_1 = 1-5i$ $z_2 = 1+3i$	9	$z_1 = 1+5iz_2$ $= 2-3i$
10	$z_1 = 1+3i$ $z_2 = 7-i$	11	$z_1 = 1+3i\ z_2$ $= -2+5i$	12	$z_1 = -1+3iz_2$ $= 6-5i$
13	$z_1 = 1-i$ $z_2 = 7+3i$	15	$z_1 = 1-i\ z_2$ $= 5-4i$	16	$z_1 = 1-4iz_2$ $= 1+2i$
17	$z_1 = 3+4iz_2$ $= -2+i$	18	$z_1 = 5-2iz_2$ $= -2+i$	19	$z_1 = -3-2iz_2$ $= 4+3i$
20	$z_1 = -i$ $z_2 = 7+4i$	21	$z_1 = 7-2iz_2$ $= 5+3i$	22	$z_1 = -5+iz_2$ $= 1+2i$
23	$z_1 = 6-5iz_2$ $= 1+i$	24	$z_1 = 7-3i\ z_2$ $= -1+4i$	25	$z_1 = 7-2i\ z_2$ $= -2+3i$
26	$z_1 = -1+5iz_2$ $= 2-5i$	27	$z_1 = -2+3iz_2$ $= 5-4i$	28	$z_1 = -3+5iz_2$ $= 4+5i$
29	$z_1 = 5-7iz_2$ $= 1-3i$	30	$z_1 = -3+2iz_2$ $= 6+5i$	31	$z_1 = 5-2iz_2$ $= -6-i$

32	$z_1 = -3 - 2i$ $z_2 = -1 + 7i$	33	$z_1 = -1 + 7i$ $z_2 = 4 - 5i$	34	$z_1 = -1 + 2i$ $z_2 = 4 - 3i$

Контрольные вопросы:

1 Что такое комплексное число?
2 Что такое мнимая единица?
3 Что такое действительная часть числа?
4 Что такое мнимая часть числа?
5 Как сравнить два комплексных числа?
6 Какие числа называются сопряженными?
7 Как представить комплексное число графически?
8 Что такое модуль числа?
9 Что такое аргумент числа?
10 Сколько может быть модулей и аргументов у комплексного числа?
11 Как найти аргумент числа?
12 Как найти сумму комплексных чисел?
13 Как найти разность комплексных чисел?
14 Как найти произведение комплексных чисел?
15 Как найти частное комплексных чисел?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Тема 1.2. Корни, степени и логарифмы

Практическое занятие №3. Преобразование выражений содержащих степень с натуральным показателем
количество часов 1
Цель:
научиться применять теоретические знания при вычислении значений выражений, использовать соответствующие формулы при решении упражнений, преобразовании выражений. содержащих степени с натуральном показателем, подготовка к контрольной работе
Задача:
формирование умения применять методы преобразования степенных выражений; отработка алгоритмов преобразования степенных выражений; выработка умения применять полученные навыки в нестандартной ситуации.

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Определение. **(- n)**-й степенью (n – натуральное) числа **a**, не равного нулю, считается число, обратное **n**-й степени числа **a:**

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Примеры. *Вычислить:*

1) 3^{-2}; 2) $\frac{3}{5^{-2}}$; 3) $\frac{4^{-3}}{7^{-2}}$.

Решение.

1) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$;   2) $\frac{3}{5^{-2}} = 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$;   3) $\frac{4^{-3}}{7^{-2}} = \frac{7^2}{4^3} = \frac{49}{64}$.

2. Следующая формула позволяет заменить обыкновенную дробь с отрицательным показателем на обратную ей дробь с положительным показателем**:**

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$$

Примеры. *Вычислить:*

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$;   5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}$;   6) $(0{,}1)^{-4}$.

Решение.

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$;   5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2} = \frac{5^2}{4^2} = \frac{25}{16} = 1\frac{9}{16}$;

6) $(0{,}1)^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{1}\right)^{4} = 10^4 = 10000.$

3. Свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степеней с любым показателем.

Для любых действительных и отличных от нуля чисел *a* и *b*, а также любых целыхчисел *m* и *n* справедливы следующие **свойства степеней с целыми показателями**:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;   3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;   5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$;   4. $(a:b)^n = a^n : b^n$;

Примеры

Упростить:

7) $\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7}$;   8) $\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^7}$;   9) $\frac{7^3 \cdot 4^3}{7^2 \cdot 4^5}$;   10) $\frac{(2 \cdot 3)^7}{2^6 \cdot 3^5}$.

Решение:

7) $\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7}$.

I способ.

$$\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7} = \frac{3^{5+10}}{3^{6+7}} = \frac{3^{15}}{3^{13}} = 3^{15-13} = 3^2 = 9.$$

II способ.

$$\frac{3^5 \cdot 3^{10}}{3^6 \cdot 3^7} = 3^5 \cdot 3^{10} \cdot 3^{-6} \cdot 3^{-7} = 3^{5+10-6-7} = 3^2 = 9.$$

При решении **7** примера **I способом** мы использовали свойства умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями**:** $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ и $\mathbf{a^m : a^n = a^{m-n}}$**.** При решении **II способом** мы использовали понятие степени с отрицательным показателем**:** $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ и свойство произведения степеней с одинаковыми основаниями**:** $\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$.

8) $\dfrac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^7}$.

$$\frac{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^7} = 2^{4+6+3-5-7} = 2^1 = 2.$$

Пример **8)** решаем так же, как решали пример **7)**вторым способом.

9) $\dfrac{7^3 \cdot 4^3}{7^2 \cdot 4^5}$.

$$\frac{7^3 \cdot 4^3}{7^2 \cdot 4^5} = \frac{7^2 \cdot 4^3 \cdot 7}{7^2 \cdot 4^3 \cdot 4^2} = \frac{7}{16}.$$

В примере **9)** представим $\mathbf{7^3}$ как $\mathbf{7^2 \cdot 7}$, а степень $\mathbf{4^5}$ как$\mathbf{4^3 \cdot 4^2}$, а затем сократим дробьна $\mathbf{(7^2 \cdot 4^3)}$.

В **10)** примере применим формулу степени произведения: $\mathbf{(ab)^n = a^n \cdot b^n}$, а затем сократим дробь на $\mathbf{(2^6 \cdot 3^5)}$.

10) $\dfrac{(2 \cdot 3)^7}{2^6 \cdot 3^5}$.

$$\frac{(2 \cdot 3)^7}{2^6 \cdot 3^5} = \frac{2^7 \cdot 3^7}{2^6 \cdot 3^5} = \frac{2^{6+1} \cdot 3^{5+2}}{2^6 \cdot 3^5} = \frac{2^6 \cdot 3^5 \cdot 2^1 \cdot 3^2}{2^6 \cdot 3^5} = 2^1 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18.$$

Определение. Степенью числа a>0 с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m - целое число, а n - натуральное (n>1), называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, a > 0$

Пример 11 $7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}; \ 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}; \ a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}$

1) $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

2) $12^{1,4} = 12^{\frac{7}{5}} = \sqrt[5]{12^7}$

3) $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2\frac{2}{5}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{12}{5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{9}\right)^{-12}} = \sqrt[5]{\left(\frac{9}{4}\right)^{12}}$

Задания к практической

Вариант 1. Вычислите: а) 2^{-1}; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{\,}{2}}$; г) $\frac{25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{625\cdot 5^{-3}}$.

Вариант 2. Вычислите: а) 1^{-7}; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $9\cdot 0{,}027^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $48^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Вариант 3. Вычислите: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $\frac{12^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{9}{4}}}{4^{-\frac{1}{4}}}$.

Вариант 4. Вычислите: а) $(-1)^{-7}$; б) $36^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0{,}75}-12\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}$;

Вариант 5. Вычислите: а) $5^{0}\cdot(-3)^{-2}+(-3)^{-2}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$;

Вариант 6. Вычислите: а) $0^{\frac{5}{6}}$; б) $100^{-\frac{1}{2}}$; в) $2^{\frac{4}{5}}\cdot 2^{\frac{11}{5}}$; г) $\frac{2\cdot 4^{-2}+\left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\sqrt{3}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$

Вариант 7. Вычислите: а) $\left(6\cdot 2^{-2}\right)^{-1}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{6^{1,7}\cdot 2^{1,3}}{3^{-1,3}}$.

работе:____

Контрольные вопросы

1. Дайте определение степени с натуральным, отрицательным и дробным показателями.
2. Перечислите свойства степеней с рациональным показателем.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №4. Преобразование выражений содержащих корни
количество часов 1

Цель:

научиться применять теоретические знания при вычислении значений выражений, использовать соответствующие формулы при решении упражнений, преобразовании выражений содержащих степени с натуральном показателем, подготовка к контрольной работе

Задача:

формирование умения применять методы преобразования степенных выражений; отработка алгоритмов преобразования степенных выражений; выработка умения применять полученные навыки в нестандартной ситуации.

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:

Корнем **n-й** степени из числа **a** называется такое число **b**, **n-я** степень которого равна **a**, то есть: $\sqrt[n]{a} = b$

$b^n = a$

Например, $\sqrt[3]{-8} = -2;\ \sqrt[3]{8} = 2$

Корень четной степени из отрицательного числа не существует. Например,

Свойства арифметического корня $\sqrt[2]{-16}$ – *не имеет смысла*

Пример 1

$$\sqrt{81} = 9\ \left(9^2 = 81\right);\ \sqrt[3]{27} = 3\ \left(3^3 = 27\right);\ \sqrt[4]{625} = 5\ \left(5^4 = 625\right);\ \sqrt[5]{0} = 0\ \left(0^5 = 0\right)$$

Пример 2

$$\sqrt[3]{-27} = -3\ \left((-3)^3 = -27\right);\ \sqrt[99]{-1} = -1\ \left((-1)^{99} = -1\right)$$

1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

2) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}}$

3) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

4) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

5) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

6) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Задание для практической работы

Вариант №1

1. Найти значение выражений: $\sqrt[3]{-27}$
2. Решите уравнение: $x^4=-16$

3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{1000 \cdot 27 \cdot 8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}4^5 \cdot 5^5}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$.

4. Какое число больше: $\sqrt[7]{128}$ или $\sqrt[5]{4}$

Вариант №2

1. Найти значение выражений: $\sqrt[4]{625}$

2. Решите уравнение: $x^3=125$

3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{64 \cdot 125 \cdot 729}$; б) $\sqrt[5]{\frac{243}{32}}$; в) $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6 \cdot 12^6}$; г) $\frac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{\frac{5}{4}}}$.

4. Какое число больше: $\sqrt[3]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$

Вариант №3

1. Найти значение выражений: $\sqrt[7]{-128}$

2. Решите уравнение: $x^4=64$

3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 0{,}0016 \cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{16^3 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{63} \cdot 0{,}125}$; г) $\frac{\sqrt[4]{112}}{\sqrt[4]{7}}$.

4. Какое число больше: $\sqrt[3]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$

Контрольные вопросы и задания

1. На примере выражения $\sqrt[3]{a}$ покажите, как можно внести множитель под знак корня.

2. На примере выражения $\sqrt{8a}$ покажите, как можно вынести множитель за знак корня.
3. На примере выражении $\frac{1}{\sqrt{a}}$ и $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ покажите, как можно освободиться от иррациональности в знаменателе дроби.

Список рекомендуемой литературы:

Практическое занятие №5.Упрощение логарифмических выражений.
количество часов 1
Цель:
отработать навыки упрощение логарифмических выражений, вычисления логарифмов, преобразования простейших логарифмических выражений, решения простейших логарифмических уравнений.
Задача:
формирование умения применять методы преобразования логарифмических выражений; отработка алгоритмов упрощение логарифмических выражений; выработка умения применять полученные навыки в нестандартной ситуации.

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:
1. Теоретический материал.

Логарифм положительного числа b по основанию a (обозначается $\log_a b$) — это показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b (**числа b, a – положительные, a≠ 1).**

Если $a^c = b$, то $\log_a b = c$

$a^{\log_a b} = b$ → основное логарифмическое тождество

Свойства логарифмов справедливы для логарифмов по любому основанию($a > 0$; $a \neq 1$**):**

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^k = k$
4. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
6. $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$

Основание логарифма и число под знаком логарифма можно поменять местами по формуле:

$\log_a b = 1/\log_b a$

Общая формула перехода к логарифму по другому основанию.

$\log_a b = \log_c b / \log_c a$

Логарифм по основанию a^n.

$\log_{a^n} b = (1/n) \cdot \log_a b$

Логарифм числа **b** по основанию **a^n** равен произведению дроби **1/n** на логарифм числа **b** по основанию **а**. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма или в основании логарифма, называется *логарифмическим*.

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение: $log_a x=b$.

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке (0; +∞) и принимает на этом промежутке все действительные значения.

Теорема о корне: пусть функция f возрастает (убывает) на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых f на этом промежутке. Тогда уравнение $f(x)=a$ имеет единственный корень в промежутке I.

По вышесказанной теореме следует, что для любого b данное уравнение имеет, и притом только одно, решение.

Из определения логарифма числа следует, что таким числом является a^b.

Пример.

Решите уравнение: $log_2(x^2+4x+3)=3$. Решение:

данному уравнению удовлетворяют те значения x, для которых выполнено равенство: $x^2+4x+3=2^3$.

Получаем обычное квадратное уравнение $x^2+4x+3=8$ или $x^2+4x-5=0$, корни которого вычисляем с помощью дискриминанта: $x_1=1$; $x_2=-5$.

Пример.

Решите уравнение: $log_5(2x+3)=log_5(x+1)$.

Решение:

данное уравнение определено для тех значений x, при которых выполнены неравенства: $2x+3>0$ и $x+1>0$ (это следует из определения логарифма).

Для этих x данное уравнение равносильно уравнению: $2x+3=x+1$, из которого находим $x=-2$. Выполняя проверку, убеждаемся, что $x=-2$ не удовлетворяет неравенству $x+1>0$.

Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Пример.

Решите уравнение: $log^2{}_5x-log_5x^2-3=0$. Решение:

данное уравнение, воспользовавшись свойством степени логарифма, можно переписать в виде: $(log_5x)^2-2log_5x-3=0$.

Сделаем замену переменной: $t=log_5x$, тогда наше уравнение перепишется в виде: $t^2-2t-3=0$, корни которого вычислим через дискриминант: $t_1=3$, $t_2=-1$.

Вернемся к исходной переменной: $log_5x=3$ или $log_5x=-1$.

Используя определение логарифма получаем корни исходного уравнения: $x_1=5^3=125$, $x_2=5^{-1}=1/5=0,2$.

Задания к практической работе:

Решите уравнение:

1 вариант 1) $\log_4(5x+6)=0$; 2) $\lg(x-9)+$ $+2\lg \quad 2x-1=2$.	**2 вариант** 1) $\lg\frac{x-5}{x-2}=2$; 2) $\lg(2x)+\lg(x+3)=$ $=\lg(12x-4)$.	**3 вариант** 1) $\log_3 x+\log_x 3=2,5$; 2) $4\lg^2 x-2=\lg x^2$.
4 вариант 1) $\log_{\frac{1}{5}}\left(7x+\frac{1}{25}\right)=2$; 2) $4\lg^2 x+\lg x^2 2=0$.	**5 вариант** 1) $\log_{\frac{1}{2}}(5-\log_3 x)=-2$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}(x- \quad \frac{x}{2} \quad -16)=-1$.	**6 вариант** 1) $\log_2(2x-1)=4$; 2) $1+\log_2(3x+1)=$ $=\log_2(x^2-5)$.

$\sqrt{\quad}$

7 вариант	8 вариант	9 вариант
1) $\log_3(x-12)=2$; 2) $\log_2(4-x)+$ $+\log_2(1-2x)=2\log_2 3.$	1) $\log_x 16-\log_x 2=1/2$; 2) $\frac{1}{2}\lg(x^2+2x)=$ $=\lg\sqrt{x+2}.$	1) $\log_3(x+8)=-2$; 2) $\lg(x-3)+$ $+\lg(x-2)=1-\lg 5.$

Контрольные вопросы:

1. Что называется логарифмическим уравнением?
2. Перечислите способы решения уравнений, содержащих переменную под знаком логарифма или в основании логарифма.
3. Формулы сокращенного умножения.
4. Основное логарифмическое тождество.
5. Свойства логарифмов.
6. Виды логарифмов

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 2. Геометрия

Тема 2.1. Прямые и плоскости в пространстве

Практическое занятие №6. Взаимное расположение прямых и плоскостей
количество часов 1

Цель:
Обобщить и систематизировать знания по теме «Взаимное расположение прямых и плоскостей»; закрепить умения использовать полученные знания для решения задач

Задача:
формирование умения использовать полученные знания для решения задач; отработка алгоритмов умения использовать полученные знания для решения задач; выработка умения применять полученные навыки в нестандартной ситуации.

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:

Теоретические сведения к практической работе:

<u>Теорема</u>
Две прямые называются скрещивающимися, если одна из них лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке не принадлежащей 1 прямой.

<u>Определение.</u>
2 прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

<u>Определение.</u>
Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются

<u>Определение.</u>
Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

<u>Теорема</u>
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны

Примеры решения задач

№ 1 Дано: a и b - скрещивающиеся прямые; γ - плоскость, $a \notin \gamma$, $b \in \gamma$. Точка $M \in a$, точка $N \in b$. Через a и N проведена плоскость α. Через b и M проведена плоскость β (рис. 1).

Найти: а) лежит ли прямая b в плоскости α? б) пересекаются ли плоскости α и β?

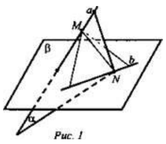


Рис. 1

Решение:

а) Если бы $b \in \alpha$, тогда в плоскости α было бы две возможности:

1) $b \parallel a$ - но это противоречит условию;

2) $b \cap a$ - но это противоречит условию; $b \cap \alpha$ в точке N, $N \notin a$.

Вывод: $b \notin \alpha$.

б) $\left.\begin{matrix} M \in \alpha, N \in \alpha \\ M \in \beta, N \in \beta \end{matrix}\right| \Rightarrow$ прямая MN - общая для плоскостей α и β.

Вывод: $\alpha \cap \beta$ по прямой MN.

(Ответ: $b \notin \alpha$, MN - прямая, по которой $\alpha \cap \beta$).

№2. Дано: ABCD - параллелограмм; ABEK - трапеция: EK - основание; $EK \notin (ABCD)$ (рис. 2).

а) Выясните взаимное расположение прямых CD и EK.

б) Найти: P(ABEK), если AB = 22,5 см; EK = 27,5 см.

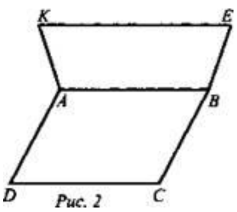


Рис. 2

Решение:

1. CD || AB - как противолежащие стороны параллелограмма AB || EK - по определению трапеции. Значит, CD || EK.

2. Так как в трапецию можно вписать окружность, то AB + KE = BE + AK. Тогда P(ABEK) = (22,5 + 27,5) · 2 = 50 · 2 = 100 (см). (Ответ: а) CD || EK; б) P(ABEK) = 100 см.)

Задание для практического занятия:

1) Треугольники АВС и АДС лежат в разных плоскостях и имеют общую сторону АС. Точка Р – середина стороны АД, точка К – середина ДС.

а) Каково взаимное расположение прямых РК и АВ?

б) Чему равен угол между прямыми РК и АВ, если угол АВС равен 40º, а угол ВСА = 80º. Ответ обобщите.

2) Прямые а и в лежат в параллельных плоскостях. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого возможного случая.

3) Точка В не лежит в плоскости Δ АДС. Точки M, N и Р – середины отрезков ВА, ВС, ВД соответственно. а) Доказать, что плоскости (MNP) и (АДС) параллельны; б) Найдите площадь треугольника MNP, если SΔАДС = 48 см2 .

4) Основание трапеции АВСД лежит в плоскости α. Через точки В и С проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках Е и F соответственно.

а) Каково взаимное расположение EF и АВ?

б) Чему равен угол между прямыми EF и АВ, если угол АВС = 150º. Ответ обоснуйте.

5) Прямые а и в лежат в пересекающихся плоскостях α и β. Могут ли эти прямые быть

а) параллельными б) скрещивающимися? Сделать рисунок для каждого случая.
6) В тетраэдре ДАВС точки M, N и P – середины рёбер ДА, ДВ, ДС соответственно.
а) Доказать, что плоскости (MNP) и (ABC) параллельны.
б) Найти площадь Δ ABC, если SΔMNP = 14 см2 .

Контрольные вопросы:

1. Какие две прямые в пространстве называются параллельными?
2. Какие две плоскости называются параллельными?
3. Сформулируйте теорему о параллельности прямой и плоскости.

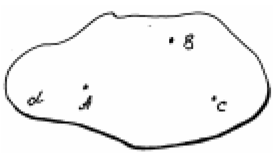
Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №7. Стереометрия
количество часов 1
Цель:
научиться применять теоретические знания при решение задач.
Задача:
формирование умения применять аксиомы стереометрии; отработка алгоритмов решение задач по стереометрии; выработка умения применять полученные навыки в нестандартной ситуации.

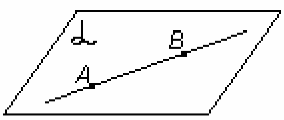
Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:
Аксиомы стереометрии:
А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



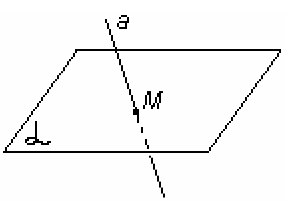
$A \in \alpha$
$B \in \alpha$ (точки A, B, C лежат в плоскости α)
$C \in \alpha$

А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости



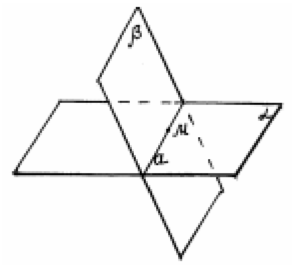
$AB \subset \alpha$
Прямая AB лежит в плоскости α

Замечание. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



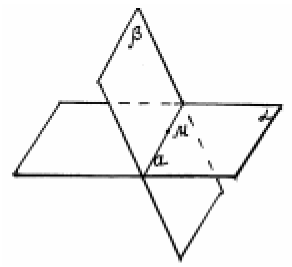
$a \cap \alpha = M$
Прямая a и плоскость α пересекаются в точке M.

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$\alpha \cap \beta = a$

α и β пересекаются по прямой а.



Задание для практического занятия:

1 вариант

1. Сторона АВ параллелограмма ABCD принадлежит плоскости α, а сторона CD ей не принадлежит. Каково взаимное расположение прямой CD и плоскости α? Объясните.
2. Точки M,N,F,K не лежат в одной плоскости. Могут ли прямые MN и FK пересекаться?
3. Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M,N,K – середины отрезков AD, AC, AB соответственно. Доказать, что плоскости (MNK) и (BCD) параллельны.
4. Плоскости α и β параллельны. Отрезок AB лежит в плоскости α, CD – в плоскости β. Отрезки BC и AD пересекаются в точке O, которая лежит между данными плоскостями. Найти AO, если AB= 3 см, CD= 12 см, AD= 20 см.

2 вариант

1. Плоскость проходит через одну из двух параллельных прямых. Как располагаются данная плоскость и другая прямая? Поясните.
2. Прямые FM и RP- скрещивающиеся. Могут ли прямые FR и MP быть параллельными?
3. Точка F не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M,N,K принадлежат отрезкам AF, BF, CF так, что ∠FMN = ∠FAB, ∠FNK = ∠FBC . Доказать, что плоскости (ABC) и (MNK) параллельны.
4. Плоскости α и β параллельны. Лучи OM и OF пересекают плоскость α в точках A и B соответственно, плоскость β – в точках C и D соответственно. Точка O лежит над данными плоскостями. Найти OB, если AB = 4см, CD = 10 см, BD = 6

Контрольные вопросы:

1. Сформулировать теорему о параллельности прямой и плоскости
2. Сформулировать теорему о параллельности плоскостей
3. Перечислите свойства параллельного проектирования

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Тема 2.2. Координаты и векторы

Практическое занятие №8. Действия над векторами в пространстве

количество часов <u>**1**</u>

Цель:

Научиться выполнять операции над векторами в координатной форме на плоскости и в пространстве. Отработать навык вычисления длины и скалярного произведения векторов

Задача:

формирование умения применять операции над векторами в координатной форме на плоскости и в пространстве и полученные навыки в нестандартной ситуации.

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование: тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:

Вектора на плоскости: Пусть даны две точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1)$, длина $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Действия над векторами: Пусть даны два вектора $\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$.

1) $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2)$; 2) $\lambda\cdot\vec{a}=(\lambda\cdot x_1;\lambda\cdot y_1),\lambda=const$; 3) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$.

Косинус угла между векторами: $\cos(\angle(\vec{a};\vec{b}))=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Справедливо: 1) $\vec{a}\|\vec{b}\Leftrightarrow$ их координаты пропорциональны; 2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow|\vec{a}\cdot\vec{b}|$

Вектора в пространстве: Пусть даны две точки $A(x_1;y_1;z_1)$ и $B(x_2;y_2;z_2)$.

Тогда координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$,

длина $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Действия над векторами: Пусть даны два вектора $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$.

1) $\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$; 2) $\lambda\cdot\vec{a}=(\lambda\cdot x_1;\lambda\cdot y_1;\lambda\cdot z_1),\lambda=const$;

3) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$.

Примеры решения задач

1. Даны вектора $\vec{a}(2;3;0),\vec{b}(-1;2;2),\vec{c}(3;1;0)$. Найти: а) координаты $2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}$; b) $|\vec{b}|$; c) $\cos(\angle(\vec{b};\vec{c}))$; d) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$.

Решение: а) $2\vec{a}-3\vec{d}+5\vec{c}=2\cdot(2;3;0)-3\cdot(-1;2;2)+5\cdot(3;1;0)=(22;5;-6)$;

b) $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$;

c) $\cos(\angle(\vec{b};\vec{c}))=\frac{(-1)\cdot3+2\cdot1+2\cdot0}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+1^2+0^2}}=\frac{-1}{3\cdot\sqrt{10}}=\frac{-\sqrt{10}}{30}\approx-0,1054$;

d) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=2\cdot(-1)+3\cdot2+0\cdot2=4$.

Задание для практического занятия:

1. Даны вектора $\vec{a}(2;3;-4),\vec{b}(-5;2;1),\vec{c}(3;-5;1)$. Найти: а) координаты $\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{c}$; b) $|\vec{a}|$; c) $\cos(\angle(\vec{b};\vec{c}))$; d) $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$.

2. Найти периметр и углы треугольника *ABC*, если *A(1;-1;3), B(3;-1;1), C(-1;1;3).*

3. Определить вид четырех угольника *ABCD*, если: а) *A(1;3), B(4;7), C(2;8), D(-1;4);* b) *A(1;3), B(2;1), C(-1;3), D(-2;5);* c) *A(2;3), D(7;5), C(10;2), D(0;-2).*

4. В точке приложены силы $\overrightarrow{F_1}(3;4),\overrightarrow{F_2}(1;-2),\overrightarrow{F_3}(-1;3)$. Найдите равнодействующую силу и углы, которые она образует с составляющими.

Контрольные вопросы

1. Сколько векторов заданной длины: а) сонаправленных с данным; б) противоположных

данному; в) задающих две упорядоченных точки?
2. Может ли сумма векторов быть: а) равной разности; б) больше суммы их длин?
3. Начнет ли двигаться покоящаяся точка, если в некоторой плоскости на нее стали действовать три равновеликие силы, расположенные под равными углами друг другу?
4. Какие значения может принимать модуль равнодействующей двух сил, модули которых 3 Н и 7 Н?
5. Справедливо ли утверждение: $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$?
6. Какой угол с осью *Ох* вектор: а) $\vec{a} = (-1;1)$, в) $\vec{b} = (\cos\alpha; \sin\alpha)$?
7. Под каким углом к оси *Ох* двигалось тело из точки *(1:1)* в точку *(4;4)*?

Список рекомендуемой литературы:

Практическое занятие №9. Решение задач
количество часов 1

Цель: закрепить умения выполнять действия над векторами
Задача: применять основные формулы и правила работы с векторами

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию:

Основные понятия.

1 Вектором называется отрезок, у которого указано, какой из концов является началом, а какой – концом (направленный отрезок), обозначается $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$, где A - начало вектора, B- конец.

2 Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых.

3 Векторы называются ортогональными, если угол между ними 90^0.

4 Векторы можно складывать (по правилам треугольника и параллелограмма), можно умножать на число: $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\vec{a} + \vec{b} = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}$; $k\vec{a} = \{ka_1, ka_2, ka_3\}$.

5 Необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов: $\vec{a} \| \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

6 Модуль вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ равен $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

7 Если заданы начало $A(x_1, y_1, z_1)$ и конец $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то его координаты и длина находятся следующим образом:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} ; \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

8 Скалярным произведением векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos\varphi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

9 $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

10 Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

11 Проекция вектора на направление: $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

Задание

1 Найти линейную комбинацию векторов $\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CD}$

2 Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CD}$

3 Найти косинусы углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$

4 Найти Найти $\left(\overline{AB}+\overline{CD}\right)\cdot\overline{AD}$

5 Найти $Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD}+\overline{AC}\right)$

6 Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

7 Выяснить, ортогональны ли векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$

Исходные данные:

Даны точки $A(6,3,3)$, $B(-1,0,-2)$, $C(3,1,1)$, $D(0,4,5)$.

Задание 1

Решение:

$\overrightarrow{AB}=\{-1-6;0-3;-2-3\}=\{-7;-3;-5\}$;

$\overrightarrow{BC}=\{3+1;1-0;1+2\}=\{4;1;3\}$;

$\overrightarrow{CD}=\{0-3;4-1;5-1\}=\{-3;3;4\}$;

$\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}+4\overrightarrow{CD}=\{-7-3\cdot4+4\cdot(-3);-3-3\cdot1+4\cdot3;-5-3\cdot3+4\cdot4\}=$
$\{-31;6;2\}$

Задание 2

Решение:

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}=\sqrt{83}$$

$$\left|\overline{BC}\right|=\sqrt{(4)^2+(1)^2+(3)^2}=\sqrt{26}$$

$$\left|\overline{CD}\right|=\sqrt{(-3)^2+(3)^2+(4)^2}=\sqrt{34}$$

Задание 3

Решение:

$$\cos \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC} = \frac{-7\cdot 4 - 3\cdot 1 - 5\cdot 3}{\sqrt{83}\sqrt{26}} = \frac{-46}{\sqrt{2158}};$$

$$\cos \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CD} = \frac{4\cdot(-3)+1\cdot 3+3\cdot 4}{\sqrt{26}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{884}}$$

Задание 4

Решение:

Даны точки $A(6,3,3)$, $B(-1,0,-2)$, $C(3,1,1)$, $D(0,4,5)$.

$\overrightarrow{AB} = \{-7;-3;-5\}$; $\overrightarrow{CD} = \{-3;\ 3;\ 4\}$;

$\overrightarrow{AD} = \{0-6;\ 4-3;\ 5-3\} = \{-6;1;\ 2\}$;

$\overline{AB} + \overline{CD} = \{-7+(-3), -3+3, -5+4\} = \{-10, 0, -1\}$

$\left(\overline{AB} + \overline{CD}\right)\cdot \overline{AD} = -10\cdot(-6)+0\cdot 1+(-1)\cdot 2 = 58$

Задание 5

Решение:

$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$,

$\overline{BD} = \{0-(-1), 4-0, 5-(-2)\} = \{1, 4, 7\}$, $\overline{AC} = \{3-6, 1-3, 1-3\} = \{-3, -2, -2\}$,

$\overline{BD} + \overline{AC} = \{1+(-3), 4+(-2), 7+(-2)\} = \{-2, 2, 5\}$.

$$Пр_{\overline{AB}}\left(\overline{BD} + \overline{AC}\right) = \frac{-7\cdot(-2)+(-3)\cdot 2+(-5)\cdot 5}{\sqrt{(-7)^2+(-3)^2+(-5)^2}} = \frac{-17}{\sqrt{83}}.$$

Задание 6

Решение:

$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$, $\overline{CD} = \{-3, 3, 4\}$

$\frac{-7}{-3} \neq \frac{-3}{3} \neq \frac{-5}{4} \Rightarrow$ векторы не являются коллинеарными.

Задание 7

Решение:

$\overline{AB} = \{-7, -3, -5\}$, $\overline{CD} = \{-3, 3, 4\}$

$-7\cdot(-3)+(-3)\cdot 3+(-5)\cdot 4 = -8 \neq 0$, следовательно, векторы не являются ортогональными.

Задания к практической работе.

1 A (2; 3; -1); B (0; 1; 2); C (4; -1; -1); D (2; -3; 1)

2 A (3; -1; 1); B (1; 3; 2); C (1; -1; -1); D (4; 0; 3)

3 A (4; 1; 2); B (1; 0; 1); C (-1; 2; -1); D (3; 1; 0)

4 A (3; -2; 1); B (2; -1; 1); C (4; 0; 2); D (1; 1; -1)

5 A (-2; 2; 1); B (3; 0; 4); C (7; 1; 0); D (3; 0; 5)

6 A (1; -1; -1); B (2; 5; 7); C (-3; 1; -1); D (2; 2; 3)

7 A (-3; 1; 4); B (1; -2; -3); C (2; 2; 3); D (5; 3; 1)

8 A (2; -5; 1); B (4; 3; 5); C (-1; 0; 1); D (2; 1; 0)

9 A (-2; 2; 1); B (3; -1; 0); C (4; 4; 0); D (1; -1; 1)

10 A (4; 2; 5); B (0; 1; 3); C (-1; -1; 1); D (2; -2; 1)

11 A (1; 0; 1); B (7; 4; 3); C (3; -5; 1); D (-2; 2; 2)

12 A (5; 1; 0); B (-1; -1; -1); C (2; 4; 7); D (1; 0; 1)

13 A (10; 1; 1); B (-2; -1; 1); C (4; 3; 2); D (1; 0; -1)

14 A (2; -7; 4); B (2; -1; 3); C (1; 0; -1); D (2; 1; 3)

15 A (6; 3; 3); B (-1; 0; -2); C (3; 1; 1); D (0; 4; 5)

16 A (3; 2; 0); B (2; -1; 7); C (4; 0; 5); D (1; -2; -1)

17 A (4; -1; 2); B (1; 0; 3); C (-2; 1; 5); D (3; 8; -1)

18 A (1; 1; -3); B (-7; 5; 2); C (2; 1; 0); D (3; -3; 1)

19 A (5; 0; 1); B (2; -1; -1); C (-6; -1; 1); D (3; 1; 3)

20 A (3; 5; 1); B (7; -4; 3); C (2; 1; 1); D (0; -1; 3)

21 A (1; -2; 1); B (-1; 8; -3); C (3; 2; 1); D (5; 3; 1)

22 A (-3; -1; 1); B (2; -3; 0); C (1; 4; 5); D (2; 3; 4)

23 A (3; -1; 2); B (4; 0; 4); C (-1; 9; -1); D (3; -2; -2)

24 A (3; -2; 1); B (4; 2; 1); C (-1; -1; 1); D (3; 0; 1)

25 A (-2; 0; 1); B (4; -1; 3); C (-3; 2; 1); D (4; 1; 1)

26 A (2; -2; 1); B (2; 5; 7); C (1; 3; 5); D (7; 0; 3)

27 A (2; 3; 3); B (-2; 4; 1); C (3; 5; 2); D (3; 8; -1)

28 A (1; 1; -3); B (-3; 2; -1); C (4; 1; 2); D (7; -3; 0)

29 A (7; 6; 1); B (2; -1; -1); C (1; 0; 1); D (-2; 1; -1)

30 A (-7; 2; -1); B (2; 5; 1); C (2; 1; 1); D (0; 1; 3)

Контрольные вопросы:

1 Чем характеризуется вектор?
2 Какие операции можно производить над векторами?
3 Какие векторы называются равными?
4 Что можно сказать об угле между векторами, если скалярное произведение отрицательно?

5 Что можно сказать об угле между векторами, если скалярное произведение положительно?
6 Что можно сказать об угле между векторами, если их скалярное произведение равно нулю?
7 Какие векторы называются коллинеарными? Какие векторы называются ортогональными?
8 Скалярное произведение векторов
9 Координаты вектора
10 Длина вектора

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 3. Комбинаторика
Тема 3.1. Элементы комбинаторики

Практическое занятие №10. Комбинаторные конструкции
количество часов 1

Цель: отработать навыки применения определений элементов комбинаторики, ее основных свойств и формул при решении упражнений и задач

Задача: применить умения по решению практических задач с использованием понятий и правил комбинаторики.

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Введем некоторые важные обозначения:
множества будем обозначать заглавными буквами;
множества состоят из элементов, которые будем обозначать малыми буквами. Так, запись a□A обозначает, что элемент а принадлежит множеству А. Такие множества будем изображать перечислением элементов, заключая их в фигурные скобки. Например, {a, b, x, y}.
3) Количество элементов в множестве называется мощностью и записывается как |A|.
Пусть имеются два множества А и В.
Напомним некоторые операции над множествами:

$A \times B = \{(a,b) | \ a \in A, \ b \in B\}$ — прямое произведение множеств.
$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ — объединение множеств.
$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ — пересечение множеств.
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ — разность множеств.
$\varnothing$ — пустое множество.
U — универсальное множество.
$\overline{A} = U \setminus A = \{x \mid x \notin A\}$— дополнение множества.

При комбинаторных расчетах часто применяются два основных комбинаторных принципа (правила).

Основные комбинаторные принципы

Правило суммы

Если A и B — несвязанные события, и существует n1 возможных исходов события A, и n2 возможных исходов события B, то возможное число исходов события «A или B» равно сумме n1+ n2.

Правило произведения

Если дана последовательность k событий с n1 возможными исходами первого, n2 □ второго, и т.д., вплоть до nk возможных исходов последнего, то общее число исходов последовательности k событий равно произведению n1* n2*…* nk.
При комбинаторных расчетах часто применяются два основных комбинаторных принципа (правила).
Задача.
Сколько трехзначных чисел начинаются с 3 или 4?
Решение
Для решения третьей задачи необходимо использовать, как правило, суммы, так и произведения. Трехзначные числа, о которых идет речь в задаче, естественным образом разбиваются на два непересекающихся класса.
К одному из них относятся числа, начинающиеся с 3, а ко второму □ с 4. Для подсчета чисел в первом классе заметим, что существует один возможный исход для первой цифры (она должна быть равна 3), 10 исходов для второй и 10 исходов для последней цифры.
По правилу произведения получаем, что всего чисел в первом классе насчитывается ровно 1*10*10 = 100. Аналогично можно подсчитать количество чисел во втором классе. Оно тоже равно 100. Наконец, по правилу суммы получаем, что существует 100 + 100 = 200 трехзначных чисел, начинающихся с 3 или 4.
Задания к практической работе.
1. Сколькими способами можно разместить 5 человек за столом, на котором поставлено 5 приборов?
2. Некто забыл последние 4 цифры телефонного номера, помнит только, что все цифры разные и среди них есть 9. Какое максимальное число номеров ему придется набрать, если он попытается дозвониться до абонента?
3. В цветочном магазине продаются цветы 6 сортов. Сколько можно составить различных букетов из 7 цветов в каждом?
4. Имеется 25 российских и 15 зарубежных марок. Сколькими способами можно выбрать 3 российские и 2 зарубежные марки?
5. Сколько различных слов можно составить из букв слова колокол?
6. Сколько различных автомобильных номеров можно составить из 28 букв и 10 цифр, если каждый номер состоит из 3 букв и 3 цифр?
7. Из группы, состоящей из 7 юношей и 4 девушек надо выбрать 6 человек так, так, чтобы среди них было не менее 2 девушек. Сколькими способами это может быть сделано?
8. У Ивана 7 книг по математике, а у Дмитрия – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять 3 книги одного на три книги другого?
9. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого и итальянского, на любой другой из этих 5 языков?
10. Сколькими способами могут выпасть три игральные кости? Во скольких случаях хотя бы одна кость откроется на 6 очках? Во скольких случаях ровно одна кость откроется на 6 очках? Во скольких случаях одна кость откроется на 6 очках, а одна – на 3 очках?
Контрольные вопросы .
1. Что такое комбинаторика?
2. Сформулируйте правило умножения.
3. Сформулируйте правило сложения.
4. Что называется n – факториалом?
5. Что называется размещениями из n элементов по m?
6. Запишите формулу для подсчёта числа размещений из n элементов по m без повторений (с повторениями).
7. Что называется перестановками из m элементов?

Список рекомендуемой литературы:
1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №11. Решение задач
количество часов 1
Цель: сформировать представление о месте комбинаторики в математике и практической деятельности;–подготовиться к решению задач по теории вероятностей
Задача: применить умения по решению практических задач с использованием понятий и правил комбинаторики.
Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию
Основные правила комбинаторики:

1. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, а объект B другими n способами, причем выборы объектов A и B несовместимы, то выбор «A или B» можно выполнить m + n способами.

Пример 3. Ученик должен выполнить практическую работу по математике. Ему предложили на выбор 17 тем по алгебре и 13 тем по геометрии. Сколькими способами он может выбрать одну тему для практической работы?
Решение: по правилу суммы получаем 17+13=30 вариантов.

2. Если некоторый объект A можно выбрать m способами, и после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) n способами, то пары объектов A и B можно выбрать m • n способами.

Пример 4. Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневые переплеты. Сколькими способами он может это сделать?
Решение: имеется 12 книг и 3 цвета, значит по правилу произведения возможно 12*3=36 вариантов переплета.
Так как комбинаторика – раздела математики, изучающего, в частности, вопрос о количестве комбинаций из *n* элементов по *m*, которые можно составлять тем или иным способом. Мы рассмотрим три таких способа.

1. Сочетания

Комбинации из *n* элементов по *m*, отличающиеся только составом, называются *сочетаниями*. Число сочетаний из *n* элементов по *m* равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad (1)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot k \cdot n$.
Пример 1: Найти 4!
Решение: 4!=1*2*3*4=24; Ответ: 4!=24

Пример 2. В группе 30 человек. Необходимо выбрать трех делегатов на конференцию. Сколько существует способов это сделать?
Решение: каждый способ – это новая тройка студентов, отобранная из 30 человек. Очевидно, эти тройки отличаются только по составу, то есть являются сочетаниями из 30 элементов по 3. Их количество находим по формуле (1):

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!\,27!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{2 \cdot 3} = 28 \cdot 29 \cdot 5 = 4060 \text{ способов.}$$

2. Размещения

Комбинации из *n* элементов по *m*, отличающиеся составом или порядком элементов, называются *размещениями*. Число размещений из *n* элементов по *m* равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2)$$

Пример 6. В группе 30 человек необходимо выбрать старосту, его заместителя и профорга. Сколько существует способов это сделать?

Решение: каждый способ – это новая тройка студентов, отобранная из 30 человек. Очевидно, эти тройки отличаются как по составу, так и по порядку, то есть являются размещениями из 30 элементов по 3. Их количество находим по формуле (2):

$A_{30}^{3} = \frac{30!}{27!} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24360$ способов.

Пример 7. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе 11 дисциплин.

Решение: каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающихся от других вариантов, как составом дисциплин, так и порядком их следования, то есть является размещением из 11 элементов по 5. Число вариантов расписания, то есть число размещений из 11 по 5 находим по формуле (2):

$$A_{11}^{5} = \frac{11!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55440 \text{ вариантов.}$$

3. Перестановки

Комбинации из n элементов по n, отличающиеся порядком, называются *перестановками*. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n! \qquad (3)$$

Пример 8. Порядок выступления семи участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?

Решение: каждый вариант жеребьевки отличается только порядком участников конкурса, то есть является перестановкой из 7 элементов. Их число находим по формуле (3):

$$P_7 = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040 \text{ вариантов.}$$

Задания для практического занятия:

Вместо фигуры нужно подставить число из своего варианта см. таблицу ниже!

Задание 1. В шахматном турнире участвует  человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

Задание 2. Расписание одного дня состоит из  уроков. Определить число вариантов расписания при выборе  дисциплин.

Задание 3. Сколькими способами могут встать в очередь в билетную кассу еловек?

Задание 4. Вычислите $C_{12}^{3} : A_{12}^{3}$.

Список:

№	Ф.И студента				
1		5	5	8	10
2		6	6	9	9
3		7	7	10	8
4		8	5	11	7
5		9	6	12	6
6		10	7	13	5
7		11	5	12	4

8		12	6	11	11
9		13	7	10	12
10		14	5	9	13
11		15	6	8	10
12		16	7	9	9
13		17	5	10	8
14		18	6	11	7
15		5	7	12	6
16		6	5	13	5
17		7	6	14	4
18		8	7	11	12
19		9	5	10	10
20		10	6	9	7
21		11	7	8	8
22		12	5	8	9
23		13	6	9	10
24		14	7	10	11

Контрольные вопросы .

3. Что такое выборка объема m? Приведите примеры.
4. Что такое соединения из n элементов по m? Примеры.
5. Понятие факториала. Чему равно 5!, 0!, 10!?
6. Правило произведения в комбинаторике.
7. Правило суммы в комбинаторике.
8. Что такое размещения из n элементов по m? Примеры

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 4. Основы тригонометрии
Тема 4.1. Основы тригонометрии

Практическое занятие №12. Преобразование простейших тригонометрических выражений
количество часов 1

Цель: закрепить умения и навыки преобразования тригонометрических выражений, используя формулы тригонометрии.

Задача: научиться преобразованию тригонометрических выражений, используя формулы тригонометрии, применять полученные умения и знания на практике.

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Основные формулы тригонометрии

Из определений синуса, косинуса, тангенса и котангенса следуют *основные тригонометрические тождества*:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$; $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$;

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \; ctg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Основой для остальных формул являются *формулы сложения*:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}; \; tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}.$$

Из формул сложения, полагая $\beta = \dfrac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$, получаем *формулы приведения* преобразования выражений вида:

$$\sin\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \cos\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \mathrm{tg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi n}{2} \pm \alpha\right), n \in \mathbf{Z}.$$

Для запоминания этих формул удобно пользоваться мнемоническим правилом:

1. Перед приведенной функцией ставится тот знак, который имеет исходная функция в соответствующей координатной четверти:

2. Функция меняется на «кофункцию», если n нечетно; функция не меняется, если n четно. (Кофункциями синуса, косинуса, тангенса и котангенса называются соответственно косинус, синус, котангенс, тангенс).

Формулы двойного угла тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha},$$
$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Пример 1.

Преобразуйте в алгебраическую сумму $\sin 5x \sin 3x$.

Решение:

по формуле $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$ имеем

$$\sin 5x \sin 3x = \frac{1}{2}\left(\cos(5x-3x) - \cos(5x+3x)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2x - \cos 8x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x.$$

Пример 2.

Вычислите: $\sin 40^0 + \sin 20^0$.

Решение: по формуле $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ имеем

$$\sin 40^0 + \sin 20^0 = 2\sin\frac{40^0+20^0}{2}\cos\frac{40^0-20^0}{2} = 2\sin 30^0\cos 10^0 = 2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}98 \approx 0{,}98.$$

Пример 3.

Докажите тождество:

а) $1+ ctg^2 a + \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$

Решение:

$1+ ctg^2 a + \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$ *(используем формулу: $1+ ctg^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$)*

$$\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$$

$\frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$ *(используем формулу: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$)*

$$\frac{1}{\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{1}{\cos^2 a \sin^2 a}$$

$$\frac{1}{\sin^2 a \cos^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a \cos^2 a}$$

Левая часть равенства = Правой части *Ответ: тождество верно*

Задания для практического занятия:

1.Упростить выражение:

а) $\cos^2 \alpha\ (1- tg^2\alpha)$; б) 0,5 $\sin 2\alpha\ tg\alpha -1$; в) $\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \cos\alpha$; г) $\frac{\sin 80 + \sin 20}{\cos 20 - \cos 80}$;

д) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) tg\ (\pi - \alpha)$; е) $\sin 63^0 \cos 27^0 + \sin 27^0 \cos 63^0$; ж) $\frac{1}{\sin^2\alpha} - ctg^2\alpha - \cos^2\beta$

2.Докажите тождество:

а) $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1} = 2\sin\alpha$; б) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = tg\alpha$; в) $(ctg\alpha - tg\alpha): \cos 2\alpha = \frac{2}{\sin^2\alpha}$; г) $1- tg^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

3. Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos 2\alpha$ если $\sin\alpha = 0{,}8$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ и $\cos\beta = \frac{12}{15}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите основное тригонометрическое тождество.
2. Запишите формулы синуса, косинуса суммы.
3. Запишите формулы синуса, косинуса разности.
4. Запишите формулы тангенса суммы, разности.
5. Запишите формулы двойного аргумента синуса, косинуса, тангенса.
6. Запишите формулы суммы синусов, косинусов.
7. Запишите формулы разности синусов, косинусов.
8. Запишите формулы произведения синусов, косинусов.
9. Запишите формулу произведения синуса на косинус.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

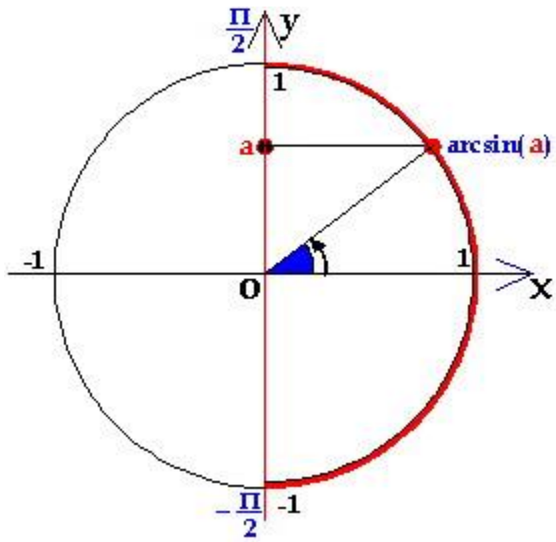
Практическое занятие №13. Нахождение значения арксинуса, арккосинуса, арктангенса количество часов 1

Цель: закрепить на примерах навыки вычисления обратных тригонометрических функций
Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Обратные тригонометрические функции:



Определение: Арксинусом числа **a** называется угол из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен числу **a**. Обозначается $\arcsin a$.

Свойство арксинуса от отрицательного угла :$arcsin(-a) = -arcsin(a)$

Для определения значений аркфункций, в том числе арксинуса, можно пользоваться таблицей «Значения тригонометрических функций» или таблицей «Аркфункции».

<u>Пример</u>: $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$ $\qquad$ $\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

Таблица «Аркфункции»

Угол (радиан)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sin α	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
Cos α					1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg α	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-				
ctg α					-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Определение: Арккосинусом числа **a** называется угол из отрезка $[0;\pi]$, косинус которого равен числу **a**. Обозначается $\arccos a$.

Свойство арккосинуса от отрицательного угла :$arccos(-a) = \pi - arccos(a)$

<u>Пример</u>: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$ $\qquad$ $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$

Определение: Арктангенсом числа **a** называется угол из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен числу **а**. Обозначается $arctga$.

Свойство арктангенса от отрицательного угла :$arctg(-a) = -arctg(a)$

<u>Пример</u>: $arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$ $arctg1 = \frac{\pi}{4}$

Определение:Арккотангенсом числа **а** называется угол из интервала $(0;\pi)$, котангенс которого равен числу **а**. Обозначается $arcctga$

Свойство арккотангенса от отрицательного угла :$arcctg(-a) = \pi - arcctg(a)$

<u>Пример</u>: $arcctg(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ $arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$

Дополнительные свойства обратных тригонометрических функций:

$Sin(arcsin(a)) = a$, если $|a| \leqslant 1$;

$Cos(arccos(a)) = a$, если $|a| \leqslant 1$;

$tg(arctg(a)) = a$, если $a \in R$;

$ctg(arcctg(a)) = a$, если $a \in R$;

$arcsin(sinx) = x$, если $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

$arccos(cosx) = x$, если $x \in [0;\pi]$;

$arctg(tg) = x$, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;

$arcctg(ctgx) = x$, если $x \in (0;\pi)$

Задания для практического занятия:

1.Вычислите:а) arcsin$\frac{1}{2}$; б) arccos $(-\frac{\sqrt{2}}{2})$; в)arctg $(-\sqrt{3})$; г) arcctg 1; д) arccos $(\frac{\sqrt{2}}{2})$;

е) arccos (-2);

2.Сравните числа: а)arcsin$\frac{1}{2}$ и arcsin $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$; б) arccos $(\frac{\sqrt{2}}{2})$ и arctg 1;

в)arcsin$(-\frac{1}{2})$ и arccos $(\frac{\sqrt{3}}{2})$;

3. Вычислите значение выражения: а) 2 arcsin $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ + 3arcsin$(-\frac{1}{2})$;

б) arccos $(-\frac{1}{2})$ - arcsin $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$;в) 2 arctg 1 + 3 arctg $(-\frac{\sqrt{3}}{3})$; г) ctg (arcsin $(\frac{\sqrt{2}}{2})$);

г) arccos (tg$\frac{3\pi}{4}$) - 2arcsin 1; д) $\frac{12}{\pi}$ (arcsin $\frac{1}{2}$ +arccos $(\frac{\sqrt{2}}{2})$ - $\frac{\pi}{12}$); е) cos(arcsin $\frac{1}{5}$ +arcsin($-\frac{1}{5}$)).

Контрольные вопросы

1.Что называют арксинусом числа а? арккосинусом числа а? арктангенсом числа а? арккотангенсом числа а?

2.Как определяется значение каждой аркфункции?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .

2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 5.Функции, их свойства и графики
Тема 5.1. Функции, их свойства и графики

Практическое занятие №14. Область определения
количество часов 1
Цель: закрепить умения и навыки решения задач по теме: «Область определения».
Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике
Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Функция	**Область определения функции**

Основные понятия.

1. Областью определения функции $y = f(x)$ (выражения $f(x)$) называют множество всех значений x , для которых функция (выражение) имеет смысл. Область определения функции $y = f(x)$ обозначается как $D(y)$ или $D(f(x))$.
2. На наличие ограничений области определения указывает:
а) присутствие корней четной степени вида $\sqrt[n]{f(x)}$ где n - четное, например, $\sqrt{x+1}$ наличие степенной функции с дробным показателем, знаменатель которого есть четное число, например, $(x^2+x-6)^{\frac{5}{4}}$;
б) присутствие функции логарифма вида $\log_a(f(x))$, например, или $\ln(x^2+1)$ или $\log_x(x^2-3)$;
в) присутствие дробей вида $\frac{f(x)}{g(x)}$, например, $x\,\frac{2x}{x^4-1}$;
г) присутствие функций тангенса вида $tg(f(x))$ и котангенса вида $ctg(f(x))$ например, $x^2+tg(2x)$ или $ctg(3x^3-1)$;
д) присутствие функций арксинуса вида $\arcsin(f(x))$ и арккосинуса вида $\arccos(f(x))$, например, $\arcsin(x^2+2)$ или $\arccos(x^2)$;
ж)присутствие показательно степенных функций вида $(f(x))^{g(x)}$, например, $x^{\cos(x+1)}$;
з)присутствие любых комбинаций всех вышеперечисленных случаев.

Таблица областей определения функций

Постоянная $y = C$	R
Корень $y = \sqrt[n]{x}$	$[0 ; +\infty)$, если n — четное; $(-\infty; +\infty)$, если n — нечетное.
Степенная $y = x^a$	$(-\infty; +\infty)$, если $a > 0$, $a \in Z$; $[0 ; +\infty)$, если $a > 0$, $a \in R$, $a \notin Z$; $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, если $a < 0$, $a \in Z$; $(0; +\infty)$, если $a \in R$, $a \neq Z$; $(-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$, если $a = 0$.
Показательная $y = a^x$	R
Логарифмическая $y = \log_n x$	$(0; +\infty)$
Тригонометрические y = sinxy y = cosxy y = tgxy y = ctgx	R R $x \in R$, $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in Z$ $x \in R$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$
Обратные тригонометрические y = arcsinxy y = arccosxy y = arctgxy y = arcctgx	[-1; 1] [-1; 1] R R

Пример 1.
Найти область определения функции
$f(x)=\frac{x+2}{x^2-3}$
Решение:
в числителе ничего особенного нет, а вот знаменатель должен быть ненулевым. Давайте приравняем его к нулю и попытаемся найти «плохие» точки:
$x^2-3=0$
$x^2=3$
Полученное уравнение имеет два корня: $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$. Данные значения **не входят в область определения функции**. Действительно, подставьте $x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$ в функцию и вы увидите, что знаменатель обращается в ноль.
Пример 2.
Найти область определения функции
$f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+5}$
Решение: попытаемся найти точки, в которых знаменатель обращается в ноль. Для этого решим квадратное уравнение:
$X^2+2x+5=0$
$D=4-20=-16< 0$
Дискриминант получился отрицательным, а значит, действительных корней нет, и наша функция определена на всей числовой оси.
Ответ: область определения: $D(f)=R$
Задания для практического занятия:
1. Найдите область определения функции $y=x^3-3x^2+7$.
2. Функция задана формулой $f(x) = 4x^2 +8$. Найдите $f(-2)$.
3. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) *y*=29–2*x*; *б*) $y=\frac{40}{x}$; *в*) $y=x^2$-4; *г*) $y=\sqrt{x}$. *а*) *y*=3*x*+37; *б*) $y=-\frac{20}{x}$; *в*) *y*=5-x^2; *г*) $y=|x|$.

4. Укажите область значения функции:

а) *y*=3*x*+32; *б*) $y=-\frac{30}{x}$; *в*) *y*=25; *г*) $y=|x|$. *а*) *y*=35–2*x*; *б*) $y=\frac{15}{x}$; *в*) *y*=-22; *г*) $y=\sqrt{x}$.

5. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $y=\frac{x+4}{x^2-1}$; *б*) $y=\frac{x}{\sqrt{2x+4}}$. *а*) $y=\frac{x+1}{x^2-4}$; *б*) $y=\frac{x-1}{\sqrt{6-3x}}$.

Контрольные вопросы .

1.Что называется областью определения функции?

2.Что называется областью значений функции?

3.Назовите области определения и значений всех элементарных функций.

4. Какие выражения должны входить в формулу записи функции, чтобы областью ее определения не являлось множество всех чисел

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .

2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №15. Арифметические операции над функциями
количество часов <u>1</u>

Цель: изучить арифметические действия (сложение, вычитание, умножение, деление) производимые с функциями, научиться строить графики функций, являющиеся суммой (разностью) других функций.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ:

Функции можно:

- складывать;
- вычитать;
- умножать;
- делить.

Давайте возьмем две функции f(x) = x^2 и g(x) = x .

Сумма этих функций будет выглядеть так : f(x) + g(x) = x^2 + x .

Сумма двух функций f и g определяется как f + g .\

Определение операций с функциями:

(f + g)(x) = f(x) + g(x)	Сложение
(f - g)(x) = f(x) - g(x	Вычитание
(f·g)(x) = f(x) · g(x)	Умножение
(f/g)(x) = f(x) /g(x)	Деление

Для функции *f* + *g* , *f* – *g* , *f* · *g* , области определяются как пересечение областей *f* и *g*.

Для *f* /*g*, область есть пересечение областей *f* и *g* кроме точек, где *g(x) = 0.*

Пример 1. $F(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ *и* $g(x) = x - 1$.

Тогда их сумма определяется как : $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (1 + \sqrt{x-2}\,) + (x - 1) = = x + \sqrt{x-2}$.

Теперь давайте сравним области первоначальных функций f и g с их суммой:

Функция	Область
$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$	$[2; +\infty)$
$g(x) = x - 1$	$(-\infty\ +\infty)$
$(f+g)(x) = x + \sqrt{}$	$[2; \infty) \cap (-\infty\ +\infty) = [2; \infty)$

Пример 2. Рассмотрим две функции $f(x) = 3\sqrt{x}$ *и* $g(x) = \sqrt{x}$.
Тогда их произведение определяется как : $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x}) = 3x$.
Обратите внимание, что область определения и значения функции $(f \cdot g)(x) = =f(x) \cdot g(x) = 3x$ есть числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$.
Теперь сравним области первоначальных функций f и g , и их произведение:

Функция	Область
$f(x) = 3\sqrt{x}$	$[0; +\infty)$
$g(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$
$(f \cdot g)(x) = 3x,\ x \geq 0$	$[0; +\infty) \cap [0; +\infty) = [0; +\infty)$

Иногда произведение двух одинаковых функций записывается как: $f(x) \cdot f(x) = f^2(x)$.
Например, $\sin(x) \cdot \sin(x) = (\sin(x))^2 = \sin^2 x$.
Теперь рассмотрим деление функций: $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$. Вспоминаем, что для f/g, область определения есть пересечение областей определения функций f и g , кроме точек, где $g(x) = 0$.

Пример 3. Пусть $f(x)= x+100500$ *и* $g(x)= x \cdot \sqrt{2+x}$, тогда будет $g(x) = 0$ *при* $x= -2$ *и* $x= 0$.

Функция	Область
$f(x) = x+100500$	$(-\infty\ +\infty)$
$g(x) = x \cdot \sqrt{2+x}$	$[-2; +\infty)$
$(f/g)(x) = (x+100500)/(x \cdot \sqrt{2+x})$	$(-2; 0) \cap (0; +\infty)$

Допустим, что есть две функции $f(x) = x^3$ *и* $g(x) = x + 4$.
Если мы заменим $g(x)$ на x в формуле для f, мы получим новую функцию, определенную
$(f\,g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^3 = (x + 4)^3$

Понятие о сложной функции

Пусть даны две функции $z = f(y)$ и $y = g(x)$. **Сложной функцией** (или *композицией* функций f и g) называется функция $z = h(x)$, значения которой вычисляются по правилу $h(x) = f(g(x))$ (т. е. сначала вычисляется $g(x)$, при этом получается некоторое число y, а затем вычисляется значение в точке y).
Пример 4. Допустим, что есть две функции $f(x) = x^3$ *и* $g(x) = x + 4$.
Если мы заменим $g(x)$ на x в формуле для f , мы получим новую функцию, определенную
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^3 = (x + 4)^3$
Для записи композиции функций употребляется значок « $\circ$ » .
Например, запись $h = f \circ g$ означает, что функция h получена как композиция функций f и g (сначала применяется g, а затем f), т. е. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
Операция образования сложной функции (или композиция функций) не обладает переместительным свойством: $f \circ g \neq f \circ g$.
Чтобы можно было вычислить сложную функцию $h = f(g(x))$, надо, чтобы число $g(x)$, т. е.

значение функции g, попадало в область определения функции f.

Пример 5. Есть две функции $f(x) = x^2 + 3$ и $g(x) = \sqrt{x}$.

Тогда композиция этих функций есть $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 3 = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3$.

Теперь сравним области функций f и g, и их сложную функцию (композицию):

Функция	**Область**
$f(x) = x^2 + 3$	$(-\infty; +\infty)$
$g(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$
$(f \circ g)(x) = x + 3$	*Все x в $[0; +\infty)$ такие, что $g(x)$ лежит в $(-\infty; +\infty)$ отсюда область есть $(-\infty; +\infty)$*

Пример 6. Рассмотрим функцию $h(x) = (x + 1)^2$, мы можем представить функцию h как сложную из двух : $f(x) = x + 1$ *и* $g(x) = x^2$, *т.е.* $h(x) = g(f(x))$.

Задания для практического занятия:

Построить график функции

1)

$y = |x| + x^2$; 2) $\left(x - 3 \cdot \frac{1}{x}\right)$; 3) $y = \frac{1}{\sin x}$; 4) $e = \frac{1}{3}|x| - 2$; 5) $y = x^2 - |x| - 6$; 6) $y = |x + 2| + 1$; 7) $y = |4 - x^2|$.

Контрольные вопросы

1. Какие арифметические операции вы знаете? Перечислить.
2. Можно ли рассматривать как композицию нескольких функций

функцию $z = \sqrt{1 - x^2}$?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №16. Схема исследования функции

количество часов <u>**1**</u>

Цель: закрепить на примерах использование достаточных признаков возрастания и убывания функции, необходимого условия экстремума для нахождения соответствующих свойств функции, применение полной схемы исследования для нахождения свойств функции и построения её графика.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Одним из важнейших приложений дифференцированного исчисления является исследование функции с целью построения ее графика.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в интервале $(a;b)$, если при $x_2>x_1$, $f(x_2)>f(x_1)$, и убывающей, если $f(x_2)<f(x_1)$.

Достаточные признаки возрастания и убывания функции:

- если функция f(x) в каждой точке интервала]a;b[имеет положительную производную, то сама функция в этом интервале возрастает;
- если функция f(x) в каждой точке интервала]a;b[имеет отрицательную производную, то сама функция в этом интервале убывает.

Определение. Функция f(x) имеет экстремум (максимум или минимум) в точке $x=x_0$, если f(x) является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двухсторонней окрестности этой точки.

Необходимое условие экстремума функции.

Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю, либо не существует.

Значения аргумента, при которых функция f(x) сохраняет непрерывность, а ее производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует, называются стационарными точками.

Первый достаточный признак экстремума функции.

Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0 и ее производная слева от этой точки положительная, а справа отрицательная, то в точке x_0 отрицательная, а справа – положительная, то в точке x_0 функция достигает минимума; если производная слева и справа от стационарной точки x_0 имеет одинаковый знак, то в этой точке функция экстремума не имеет.

Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания, точек экстремума функции.

1. Найдем область определения.
2. Вычислим первую производную.
3. Найдем критические точки.
4. Выясним знак производной на промежутке.
5. Сделаем вывод.

Пример 1: $f(x)=x^3 – 3x + 2$

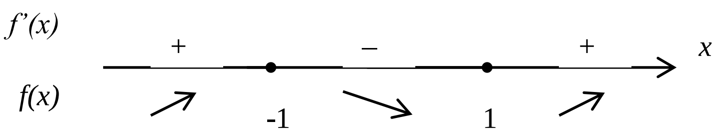
1. Область определения – любые числа, т.к. функция представлена в виде многочлена.
2. $f'(x)=(x^3 – 3x + 2)' = 3x^2 – 3.$
3. Чтобы найти критические точки необходимо решить уравнение $f'(x)=0$

$3x^2 – 3 = 0$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1$ *и* $x_2 = -1$

4. Отметим эти точки на координатной прямой.



$x\in(-\infty;-1), f'(-2)=3(-2)^2 – 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.

$x\in(-1;1)$, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 – 3 = -3 > 0 \Rightarrow$ функция убывает.

$x\in(1;+\infty), f'(2) = 3 \cdot 2^2 – 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает на этом промежутке.

В точке $x=-1$ производная поменяла знак с плюса на минус – значит это точка максимума;

В точке $x=1$ производная поменяла знак с минуса на плюс – значит это точка минимума.

Ответ: функция возрастает при $x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; убывает при $x\in[-1;1]$.

$x=-1$ – *max*; $x=1$ – *min*

Пример 2.Исследовать функцию $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ и построить ее график.

Решение:

1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых *x*. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.

2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ пересекает ось О*x* при $y=0$, т. е.

$$(x+1)\cdot(x–2)^2=0; \quad x+1=0 \text{ или } (x–2)^2=0; \quad x=-1 \text{ или } x=2.$$

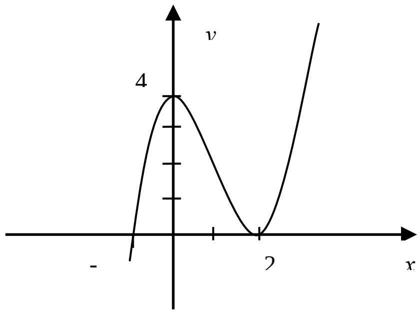
График функции $y=(x+1)\cdot(x–2)^2$ пересекает ось *Oy* при x=0, т. е.

$y=(0+1)\cdot(0–2)^2=1\cdot4=4$. Т.о. мы получили три точки: $(–1; 0), (2; 0), (0; 4)$.

3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной: $y'=((x+1)\cdot(x-2)^2)'=3x\cdot(x-2)$.
Из уравнения $y'=0$ найдем критические точки: $3x\cdot(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$.
Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
	возрастает	max	убывает	min	возрастает

Функция возрастает на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(2, +\infty)$, убывает на интервале (0; 2), имеет максимум при x=0 и минимум при $x=2$: $y_{max}=y(0)=4$; $y_{min}=y(2)=0$.
4) По полученным точкам строим график:



Задания для практического занятия:
1.Исследовать функцию на возрастание и убывание, точки экстремума
а) $f(x)=2x^6-5x^4$
б) $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$
в) $f(x)=(x-2)^4$
2.Исследовать функцию по полной схеме и построить ее график
а) $f(x)=x^2-4x+3$
б) $f(x)=12x-x^3$

Контрольные вопросы .
1. Что такое - критическая точка функции?
2. Что называют экстремумом функции?
3. Признак максимума (минимума) функции.
4. Признак возрастания/убывания функции.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 6. Многогранники. Тела и поверхности вращения
Тема 6.1. Многогранники

Практическое занятие №17. Правильные многогранники
количество часов 1
Цель: закрепить на примерах какие бывают правильные многогранники
Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике
Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Правильный многогранник – выпуклый многогранник, все грани которого равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.
Правильный тетраэдр – многогранник, составленный из четырех равносторонних треугольников.
Правильный октаэдр – многогранник, составленный из восьми равносторонних треугольников
Правильный икосаэдр – многогранник, составленный из двадцати равносторонних треугольников.
Куб (гексаэдр) – многогранник, составленный из шести квадратов.
Правильный додекаэдр – многогранник, составленный из двенадцати правильных пятиугольников. Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани - равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.
Отметим, что поскольку все грани - равные правильные многоугольники, то все ребра правильного многогранника равны.
Вам уже известны примеры некоторых правильных многогранников. Например, куб. Все его грани - равные квадраты и к каждой вершине сходится три ребра.
Также нам уже знаком правильный тетраэдр.
Заметьте, что правильный тетраэдр и правильная треугольная пирамида – это различные многогранники!
Напомним, что пирамида называется правильной, если в основании лежит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром многоугольника. Таким образом, в правильной треугольной пирамиде боковые ребра равны друг другу, но могут быть не равны ребрам основания пирамиды, а в правильном тетраэдре все ребра равны.
Правильных многогранников существует всего 5. Перечислим их.
Правильный тетраэдр – многогранник, составленный из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников, значит сумма плоских углов при каждой вершине равна 180.

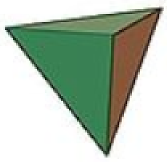


Рисунок 1 - Правильный тетраэдр

Правильный октаэдр – многогранник, составленный из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников, значит, сумма плоских углов при каждой вершине равна 240.

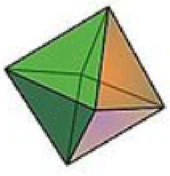


Рисунок 2 - Правильный октаэдр

Куб (гексаэдр) – многогранник, составленный из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трех квадратов, значит, сумма плоских углов при каждой вершине равна 270.

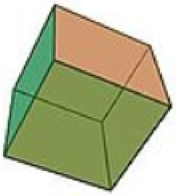


Рисунок 3 - Куб

Правильный икосаэдр – многогранник, составленный из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников, значит, сумма плоских углов при каждой равна 300.

Рисунок 4 – Правильный икосаэдр

Правильный додекаэдр – многогранник, составленный из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников, значит, сумма плоских углов при каждой равна 324.

Рисунок 5 – Правильный додекаэдр

Название каждого правильного многогранника происходит от греческого наименования «эдра» - грань; «тетра» - 4; «гекса» - 6; «окта» - 8; «икоса» - 20; «додека» -12.

Докажем, что правильных многогранников существует ровно 5, то есть что не существует правильного многогранника, гранями которого являются правильные n-угольники при n≥6. Действительно, угол правильного n-угольника при n≥6 не меньше 120^0. С другой стороны, при каждой вершине многогранника должно быть не менее трех плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани - правильные n-угольники при n≥6, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше 360^0. Но это не возможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360^0.

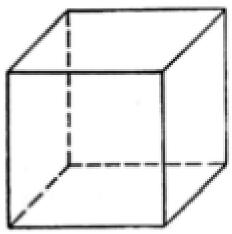
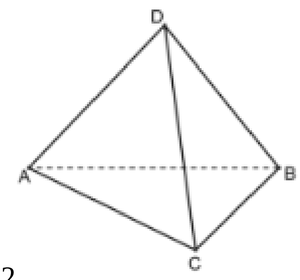
По этой причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, либо четырех, либо пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников.

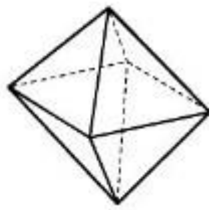
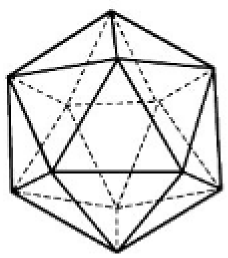
Задания для практического занятия:

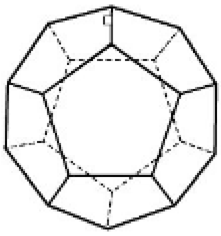
№1 Выберите неверные утверждения

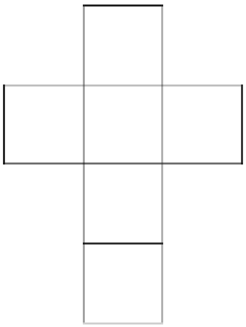
1) правильный додекаэдр состоит из 8 правильных треугольников
2) тетраэдр имеет 4 грани
3) гексаэдр состоит из шести параллелограммов
4) правильный октаэдр состоит из правильных пятиугольников

№ 2 Установите соответствие между правильными многогранниками и их развертками.

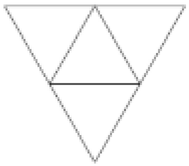
1  2 

3  **4**  5

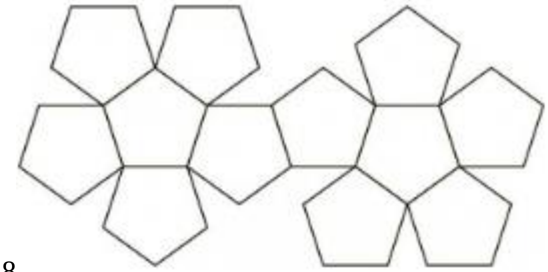




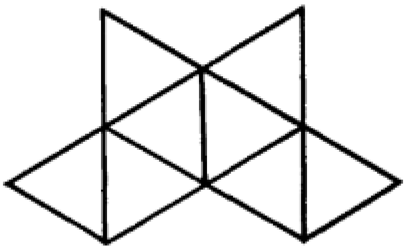
6



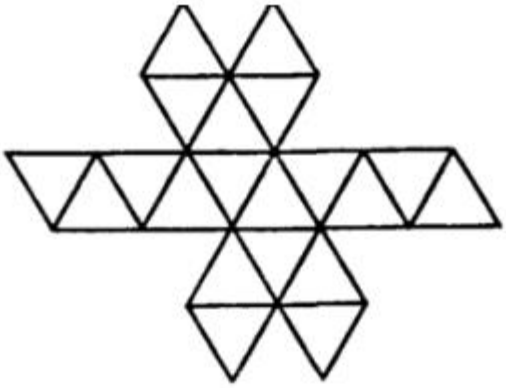
7



8



9



10

Контрольные вопросы

1.Найдите в Интернете материалы о теореме Декарта—Эйлера для выпуклого многогранника, а также о развёртках многогранников и свойствах выпуклых многогранников.
2.Повторите и углубите свои знания о призмах и пирамидах, тетраэдрах, их особенностях и развёртках. Найдите в Интернете формулы для вычисления площадей поверхностей и объёмов этих тел, формулы для вычисления объёмов других многогранников. Нашли ли вы формулы для площадей и объёмов, отличные от имеющихся в учебнике?
3. Найдите в Интернете материал к проекту о правильных многогранниках. Обратите внимание на рисунки по этой теме (см.: «Википедия — Правильный многогранник») и формулы для вычисления площадей поверхностей и объёмов правильных многогранников.
4. Посмотрите рисунки, посвящённые невыпуклым многогранникам и правильным невыпуклым многогранникам. Вы найдёте прекрасные их изображения. Сделайте модели невыпуклых и правильных невыпуклых многогранников из бумаги (например, звёздчатых многогранников**)** по развёрткам, которые размещены в Интернете. Посмотрите материалы по теме «Многогранники в архитектуре», а также загляните на сайт: http://www.mnogogranniki.ru/.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №18. Решение задач
количество часов 1

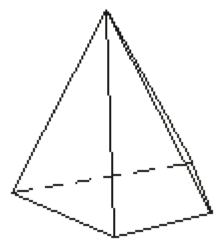
Цель: научиться изображать пирамиды, находить их элементы и площадь полной поверхности

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая основанием, есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые боковыми, - треугольники, имеющие общую вершину.



Общая вершина боковых треугольников называется *вершиной* пирамиды, а перпендикуляр, опущенный из вершины на основание, - *её высотой* .

Плоскость, проведённая через вершину пирамиды и какую-нибудь диагональ основания, называется *диагональной плоскостью*.
Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные и т.д., смотря по тому, лежит ли в основании треугольник, четырёхугольник и т.д. Треугольная пирамида называется *тетраэдром*; у такой пирамиды все четыре грани - треугольники.
Пирамида называется *правильной*, если, во-первых, её основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой. Поэтому все боковые грани правильной пирамиды - равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой*.
Часть пирамиды, заключённая между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённой пирамидой*. Параллельные многоугольники называются *основаниями*, а расстояние между ними – *высотой*.
Усечённая пирамида называется *правильной*, если она составляет часть правильной пирамиды.

Боковая поверхность пирамиды.

1. **Теорема:** Боковая поверхность призмы равна произведению перпендикулярного сечения на боковое ребро.
Следствие: Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

2. **Теорема:** Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.

3. **Теорема**: Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров обоих оснований на апофему.

Примеры

1. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7см

Решение.
Площадь правильного треугольника в основании призмы находится по формуле:
По условию задачи a = 7 см
Так как площадь грани призмы в данном случае будет равна 7h, где h - высота бокового ребра, количество граней - три, то
$49\sqrt{3} / 4 = 3 * 7h$
$49\sqrt{3} / 4 = 21h$
откуда

$h = 7\sqrt{3} / 12$
Ответ: длина бокового ребра правильной треугольной призмы равна $7\sqrt{3} / 12$

2. Найдите площадь правильной треугольной призмы, сторона основания которой 6 см, а высота - 10 см.
Решение.
Площадь правильного треугольника в основании призмы находится по формуле:
По условию задачи a = 6 см откуда $S = \sqrt{3} / 4 * 36 = 9\sqrt{3}$
Поскольку у правильной треугольной призмы оснований два, то площадь оснований будет равна
$9\sqrt{3} * 2 = 18\sqrt{3}$
Площадь каждой из граней будет равна 6 * 10 = 60, а поскольку граней три, то 60 * 3 = 180
Таким образом, площадь полной поверхности призмы будет равна $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$ см кв.
Ответ: $180 + 18\sqrt{3} \approx 211,18$

3. В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 $см^2$, а высота 14 см. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.
Решение.
Правильный четырехугольник - это квадрат.
Соответственно, сторона основания будет равна $\sqrt{144} = 12$ см.
Откуда диагональ основания правильной прямоугольной призмы будет равна
$\sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$
Диагональ правильной призмы образует с диагональю основания и высотой призмы прямоугольный треугольник. Соответственно, по теореме Пифагора диагональ заданной правильной четырехугольной призмы будет равна:
$\sqrt{(12\sqrt{2})^2 + 14^2} = 22$ см
Ответ: 22 см
4.Боковая грань правильной треугольной пирамиды представляет собой правильный треугольник, площадь которого $16\sqrt{3}$ $см^2$. Вычислить периметр основания пирамиды.
Решение.
Правильный треугольник - это равносторонний треугольник. Соответственно, боковая грань пирамиды представляет собой равносторонний треугольник.
Площадь равностороннего треугольника равна:
$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = 3\sqrt{3}r^2$$
Соответственно:
$16\sqrt{3} = a^2 \sqrt{3} / 4$
$16 = a^2 / 4$
$a^2 = 64$
a = 8 см
Основанием правильной треугольной пирамиды является правильный (равносторонний) треугольник. Таким образом, периметр основания пирамиды равен
8 * 3 = 24 см
Ответ: 24 см.

Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, апофема равна 13 см. Найдите площадь полной поверхности.
2. В правильной четырёхугольной призме площадь основания 144 $см^2$, а высота 14 см. Найти диагональ призмы и площадь полной поверхности.

Вариант 2

1. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 72, боковые рёбра равны 39. Найти площадь полной поверхности этой пирамиды.

2. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ равна 4, а боковое ребро – 5. Найдите площадь сечения, которое проходит через ребро $АА_1$ и вершину С.

Вариант 3

1. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 8см , апофема равна 12 см. Найдите площадь полной поверхности.
2. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы равна площади основания. Вычислите длину бокового ребра, если сторона основания 7см

Вариант 4

1. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 16 и 30, и боковым ребром, равным 40.
2. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы $АВСДА_1В_1С_1Д_1$ равна 3, а боковое ребро – 4. Найдите площадь сечения, которое проходит через сторону основания АД и вершину $С_1$.

Контрольные вопросы .

1. Какая пирамида называется правильной?
2. Как называется пирамида, все грани которой равносторонние треугольники?
3. Что лежит в основании n-угольной пирамиды?
4. Как называется высота боковой грани правильной пирамиды?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Тема 6.2. Тела и поверхности вращения

Практическое занятие №19. Решение задач

количество часов 1

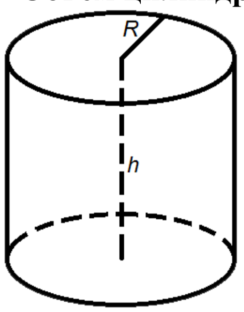
Цель: рассмотреть задачи на вычисление объёма тел вращения , показать практическую направленность математики

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Объём цилиндра



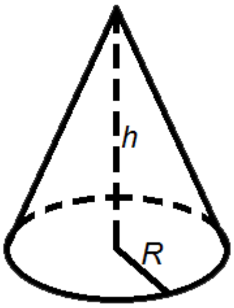
Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту.
Формулы объема цилиндра:

$\mathbf{V = \pi R^2 h}$

$\mathbf{V = S_{осн.} \cdot h}$

где V - объем цилиндра,
$S_{осн.}$ - площадь основания цилиндра,
R - радиус цилиндра,
h - высота цилиндра.

Объём конуса



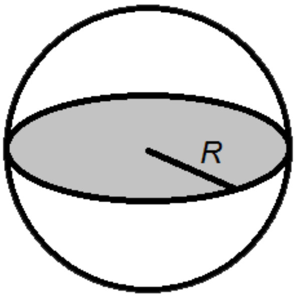
Объем конуса равен трети отпроизведению площади его основания на высоту.
Формулы объема конуса:

$\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$

$\mathbf{V = \frac{1}{3} S_{осн.} h}$

где V - объем конуса,
$S_{осн.}$ - площадь основания конуса,
R - радиус основания конуса,
h - высота конуса.

Объём шара



Объем шара равен четырем третим от его радиуса в кубе помноженого на число пи.
Формула объема шара:

$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

где V - объем шара,
R - радиус шара.

Задания для практического занятия:

Вариант №1

1. Образующая прямого конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объём конуса
2. Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 24. Найдите объём цилиндра.

Вариант №2

1. Найдите объём конуса, полученного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $3\sqrt{2}$ см вокруг своего катета.
2. Конус вписан в цилиндр. Объем конуса равен 5. Найдите объем цилиндра.

Вариант №3

1. Диагональ осевого сечения цилиндра 13 см, высота 5 см. Найдите объём цилиндра.

2. Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 4 см. Объем параллелепипеда равен 16. Найдите высоту цилиндра.

Вариант №4

1. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 2 и 4. Её объём равен 8. Найдите высоту этой пирамиды.
2. Образующая и радиусы большего и меньшего основания усечённого конуса равны соответственно 13 см, 11 см, 6 см. Вычислите объём этого конуса.

Контрольные вопросы
1. Формула объёма цилиндра .
2. Формула объёма конуса
3. Формула объёма шара

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 7. Начала математического анализа
Тема 7.1. Производная функции

Практическое занятие №20. Производные основных элементарных функций
количество часов 1

Цель: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования. Закрепить навык нахождения производной и дифференциалов.
Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Производной функции f*(x)* *(f'(x₀))* в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

$1)\ (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
$2)\ (cf(x))' = c \cdot f'(x)$, где $c - const$
$3)\ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Задания для практического занятия:

Вариант №1

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = ctg\ x + 2x^3 - 2^x$, 2) $f(x) = x^2 \sin x$, 3) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\cos x}$,

4) $f(x) = (3x^2 - 2tgx)^5$, 5) $f(x) = \dfrac{5}{x^3} - 3x + \dfrac{3}{x} - 10$.

6) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 7) $f(x) = 3\sin 2x - 2\cos 3x$

Дополнительное задание.

2. Точка движется по закону $S = 3t^3 - 12t + 5$. Найдите скорость движения при $t = 2c$.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 3\cos x + \sin x$ *в точке* $x_0 = n$.

Вариант №2

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \dfrac{12}{x^2} - x + \dfrac{7}{x} + 8\sqrt{x}$, 2) $f(x) = (x^2 - 2\sin x)^3$, 3) $f(x) = \dfrac{5^x}{\ln x}$,

4) $f(x) = x^2\, tgx$, 5) $f(x) = 5\cos x + x^5 - e^x$.

6) $f(x) = x^3 + \cos x$. 7) $f(x) = 3^{4x} + x^2$

Дополнительное задание.

2.Точка движется по закону $S = 2t^3 + t - 5$. Найдите скорость движения при $t = 3c$.

3.Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = e^x + \ln x$ в точке $x_0 = 1$.

Вариант №3

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^4}$, 2) $f(x) = (x - 5\cos x)^3$, 3) $f(x) = \dfrac{4}{x^8} - 2x^9 + \dfrac{7}{\sqrt{x}} - 2$,

4) $f(x) = x^7\, ctgx$, 5) $f(x) = \sin x - 2x^7 - 6^x$.

6) $f(x) = 2x - \sin x$. 7) $f(x) = 4e^{5x} - 7x^3$

Дополнительное задание.

2. Точка движется по закону $S = 5t^3 - 8t + 3$. Найдите скорость движения при $t = 1c$

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 3tgx - \cos x$ в точке $x_0 = n$.

Вариант №4

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \cos x + 6x^4 - 4^x$, 2) $f(x) = x^3\, ctgx$, 3) $f(x) = \dfrac{e^x}{\sin x}$,

4) $f(x) = (2x^3 - 5\ln x)^3$, 5) $f(x) = \dfrac{2}{x^4} - 3x + \dfrac{7}{x} + 1$.

6) f(x)=$2^x + 1$ *7) f(x)=*$\sin(x+x^3) - \frac{1}{2}x^4$.

Дополнительное задание.

2. Точка движется по закону $S = 2t^3 – 2t +5$. Найдите скорость движения при $t = 3c$.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 3\log_2 x-5$ в точке $x_0 = 3$.

Вариант №5

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \frac{6}{x^5} - x^7 + \frac{7}{x} - \sqrt{x}$, 2) $f(x) = (5x – 4\cos x)^5$, 3) $f(x) = \frac{3^x}{x^5}$,

4) $f(x) = x^2 \,tgx$, 5) $f(x) = 5\sin x +x^6 – 8e^x$.

6) $f(x)=\cos x – x$ 7) $f(x)= -e^x + 3x^{3x}$

Дополнительное задание.

2. Точка движется по закону $S = t^3 – 4t$. Найдите скорость движения при $t = 2c$.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 3(x^3 +5)$ в точке $x_0 = 2$.

Вариант №6

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$, 2) $f(x) = (x^2 – e^x)^5$, 3) $f(x) = \frac{1}{x^9} - 5x^4 + \frac{6}{\sqrt{x}} - 3$,

4) $f(x) = x^5 \ln x$, 5) $f(x) = \sqrt{x} - x^2 – 2^x$

6 $f(x)=x^5 – \sin$ 7) $f(x)=x^4 + \cos(x+3x^2)$

Дополнительное задание.

2. Точка движется по закону $S = t^3 + 12t -5$. Найдите скорость движения при $t = 2c$.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 3/x$ в точке $x_0 = 3$.

Контрольные вопросы .

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.

4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?

Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №21. Применение производной к исследованию функций количество часов 1

Цель: закрепить на примерах использование достаточных признаков возрастания и убывания функции, необходимого условия экстремума для нахождения соответствующих свойств функции, применение полной схемы исследования для нахождения свойств функции и построения её графика.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию
Одним из важнейших приложений дифференцированного исчисления является исследование функции с целью построения ее графика.
Определение. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в интервале $(a;b)$, если при $x_2>x_1$, $f(x_2)>f(x_1)$, и убывающей, если $f(x_2)<f(x_1)$.
Достаточные признаки возрастания и убывания функции:
- если функция $f(x)$ в каждой точке интервала $]a;b[$ имеет положительную производную, то сама функция в этом интервале возрастает;
- если функция $f(x)$ в каждой точке интервала $]a;b[$ имеет отрицательную производную, то сама функция в этом интервале убывает.

Определение. Функция $f(x)$ имеет экстремум (максимум или минимум) в точке $x=x_0$, *если* $f(x)$ является наибольшим или наименьшим значением функции в некоторой двухсторонней окрестности этой точки.
Необходимое условие экстремума функции.
Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то ее производная в этой точке равна нулю, либо не существует.
Значения аргумента, при которых функция f(x) сохраняет непрерывность, а ее производная $f'(x)$ обращается в нуль или не существует, называются стационарными точками.
Первый достаточный признак экстремума функции.
Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0 и ее производная слева от этой точки положительная, а справа отрицательная, то в точке x_0 отрицательная, а справа – положительная, то в точке x_0 функция достигает минимума; если производная слева и справа от стационарной точки x_0 имеет одинаковый знак, то в этой точке функция экстремума не имеет.
Алгоритм нахождения промежутков возрастания и убывания, точек экстремума функции.

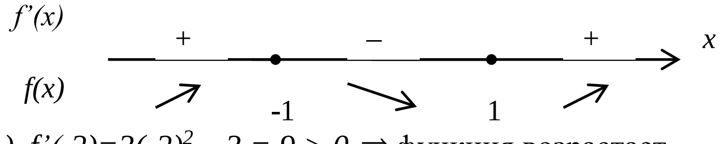
6. Найдем область определения.
7. Вычислим первую производную.
8. Найдем критические точки.
9. Выясним знак производной на промежутке.
10. Сделаем вывод.

Пример 1: $f(x)=x^3 – 3x + 2$

5. Область определения – любые числа, т.к. функция представлена в виде многочлена.
6. $f'(x)=(x^3 – 3x + 2)' = 3x^2 – 3$.
7. Чтобы найти критические точки необходимо решить уравнение f'(x)=0

$3x^2 – 3 = 0$
$x^2 = 1$
$x_1 = 1$ *и* $x_2 = -1$

8. Отметим эти точки на координатной прямой.



$x\in(-\infty;-1)$, $f'(-2)=3(-2)^2 – 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает.
$x\in(-1;1)$, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 – 3 = -3 > 0 \Rightarrow$ функция убывает.
$x\in(1;+\infty)$, $f'(2) = 3 \cdot 2^2 – 3 = 9 > 0 \Rightarrow$ функция возрастает на этом промежутке.
В точке $x=-1$ производная поменяла знак с плюса на минус – значит это точка максимума;

В точке $x=1$ производная поменяла знак с минуса на плюс – значит это точка минимума.
Ответ: функция возрастает при $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$; убывает при $x \in [-1;1]$.
$x=-1$ – *max*; $x=1$ – *min*

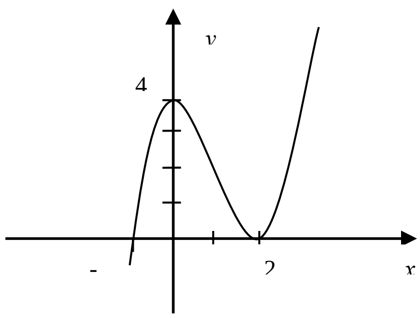
Пример 2. Исследовать функцию $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ и построить ее график.
Решение:
1) Данная функция является многочленом (можно раскрыть скобки, получим многочлен третьей степени), поэтому она определена, непрерывна и дифференцируема при любых x. Поэтому область определения функции – вся числовая прямая.
2) Вычислим точки пересечения графика функции с осями координат: график функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Ox при y=0, т. е.

$$(x+1)\cdot(x-2)^2=0; \quad x+1=0 \text{ или } (x-2)^2=0; \quad x=-1 \text{ или } x=2.$$

График функции $y=(x+1)\cdot(x-2)^2$ пересекает ось Oy при x=0, т. е.
$y=(0+1)\cdot(0-2)^2=1\cdot 4=4$. Т.о. мы получили три точки: $(-1;\ 0)$, $(2;\ 0)$, $(0;\ 4)$.
3) Найдем промежутки монотонности функции и ее экстремумы с помощью первой производной: $y'=((x+1)\cdot(x-2)^2)'=3x\cdot(x-2)$.
Из уравнения $y'=0$ найдем критические точки: $3x\cdot(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$.
Результаты решения занесем в таблицу:

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0;\ 2)$	2	$(2;\ +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↗	4	↘	0	↗
	возрастает	*max*	*убывает*	*min*	*возрастает*

Функция возрастает на интервалах $(-\infty,\ 0)$ и $(2,\ +\infty)$, убывает на интервале $(0;\ 2)$, имеет максимум при $x=0$ и минимум при $x=2$: $y_{max}=y(0)=4$; $y_{min}=y(2)=0$.
4) По полученным точкам строим график:



Задания для практического занятия:
1.Исследовать функцию на возрастание и убывание, точки экстремума
а) $f(x)=2x^6-5x^4$
б) $f(x)=x^4+4x^3+4x^2+1$
в) $f(x)=(x-2)^4$
2.Исследовать функцию по полной схеме и построить ее график
а) $f(x)=x^2-4x+3$
б) $f(x)=12x-x^3$
Контрольные вопросы
1. Дайте определение максимума (минимума) функции в точке. Что можно сказать о знаке приращения функции в достаточно малой окрестности точки максимума (минимума)?

2. Каковы необходимые условия существования экстремума функции? Каков их геометрический смысл?
3. Каково правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке?
4. Дайте определение выпуклости (вогнутости) кривой на промежутке.
5. Каково правило отыскания интервалов выпуклости и вогнутости кривой?
6. Точка перегиба кривой. Как ее найти?
7. Каков алгоритм построения графика функции? .

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Тема 7.2. Первообразная и интеграл

Практическое занятие №22. Площадь криволинейной трапеции
количество часов 1

Цель: закрепить навык вычисления площади криволинейной трапеции.
Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике
Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Определение. Криволинейной трапецией (рис. 1) называют фигуру, которая ограничена:

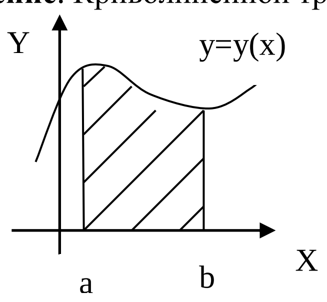


Рис.1

- сверху - графиком непрерывной функции *y=y(x)*
- снизу – осью OX (*y=0*)
- слева – прямой $x=a$
- справа – прямой $x=b$

Утверждение. Геометрический смысл определённого интеграла в том, что его значение равно площади соответствующей криволинейной трапеции:

$$S = \int_a^b y(x)dx \qquad (1)$$

Рассмотрим различные методы вычисления площадей плоских фигур.
Пример 1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2$, x=-1, x=2 и осью OX.
Решение: данная фигура (рис. 2) представляет собой криволинейную трапецию, поэтому её площадь вычисляется по формуле (1).

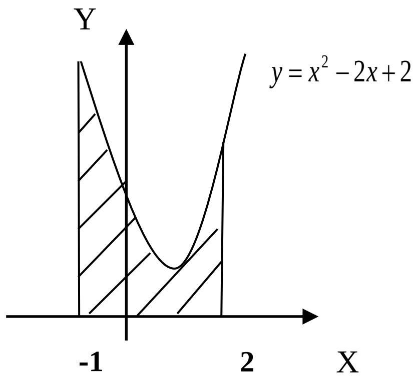


Рис. **2**

$$S = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 2)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} - x^2\Big|_{-1}^{2} + 2x\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \left(\frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) - \left(2^2 - (-1)^2\right) + \left(2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)\right) =$$

$$= 3 - 3 + 6 = 6.$$

Ответ: 6 кв.ед.

Пусть *y=f(x)* – непрерывная функция при $x \in [a, b]$, график которой расположен ниже оси OX (рис. 3). Значение определённого интеграла будет отрицательным, поэтому для расчёта площади берём значение интеграла по модулю.

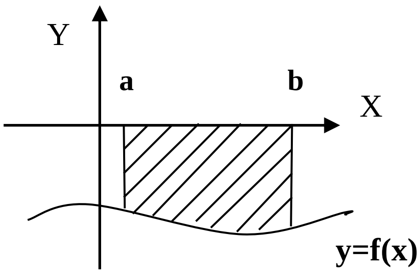


Рис. **3**

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right| \qquad (2)$$

Пример 2. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y = x^2 - 5x + 6$ и осью OX.

Решение: данная фигура (рис. 4) расположена ниже оси OX, поэтому применим формулу (2).

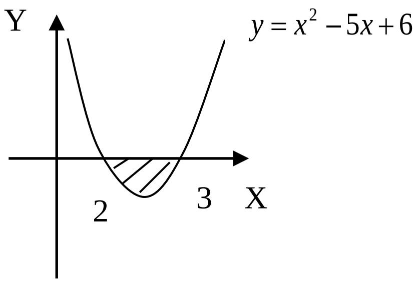


Рис. 4

$$S = \left| \int_2^3 (x^2 - 5x + 6)dx \right| = \left| \frac{x^3}{3}\Big|_2^3 - \frac{5x^2}{2}\Big|_2^3 + 6x\Big|_2^3 \right| =$$

$$= \left| \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{5 \cdot 3^2}{2} - \frac{5 \cdot 2^2}{2}\right) + (6 \cdot 3 - 6 \cdot 2) \right| =$$

$$= \left| \frac{19}{3} - \frac{25}{2} + 6 \right| = \left| \frac{38 - 75 + 36}{6} \right| = \left| -\frac{1}{6} \right| = \frac{1}{6}$$

Ответ: 1/6 кв.ед.

Пример 3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 + 1$ и $y = -x + 3$.

Решение: данная фигура (рис. 5)представляет собой разность криволинейных трапеций Абсциссы точек пересечения находим по чертежу: x_1=-2 и x_2=1.

$S = \int_{-2}^{1} (-x + 3)dx - \int_{-2}^{1} (x^2 + 1)dx$. Можно записать под один интеграл:

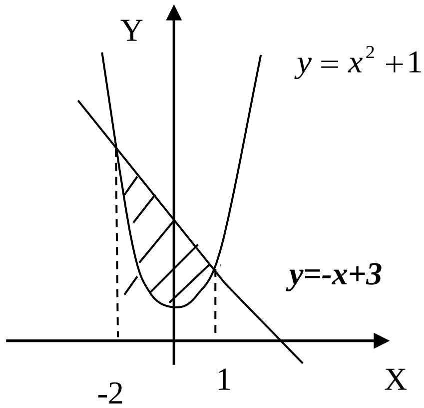


Рис. **5**

$$S=\int_{-2}^{1}\left(-x+3-(x^2+1)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x-x^2\right)dx=$$

$$=2x\Big|_{-2}^{1}-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1}-\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-2}^{1}=\left(2\cdot1-2\cdot(-2)\right)-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)-$$

$$-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}\right)=6-\left(-\frac{3}{2}\right)-3=4\frac{1}{2}$$

Ответ: 4,5 кв.ед.

Пример 4. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2+1$и $y=-x+3$, и координатными осями.

Решение: данная фигура (рис. 6) представляет собой сумму криволинейных трапеций $S=S_1+S_2$, где $S_1=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx$ и $S_2=\int_1^3\left(-x+3\right)dx$. Получим формулу:

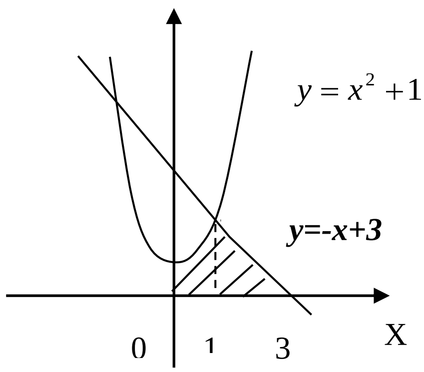


Рис. **6**

$$S=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx+\int_1^3\left(-x+3\right)dx=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+x\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^3+3x\Big|_1^3=$$

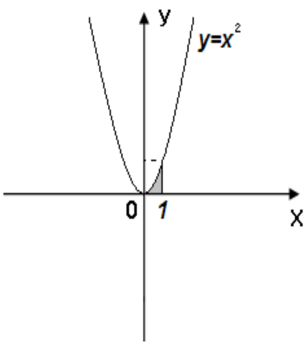
$$=\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+(1-0)-\left(\frac{3^2}{2}-\frac{1^3}{2}\right)+\left(3\cdot3-3\cdot1\right)=$$

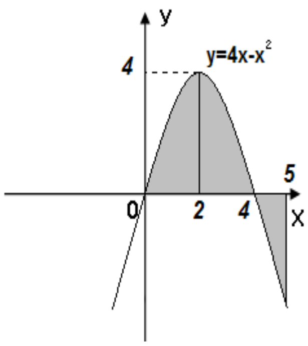
$$=\frac{1}{3}+1-4+6=3\frac{1}{3}$$

Ответ: $3\frac{1}{3}$ **кв.ед.**

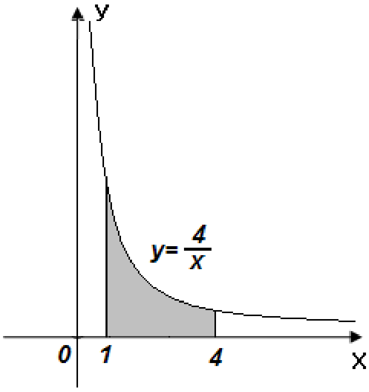
Задания для практического занятия:

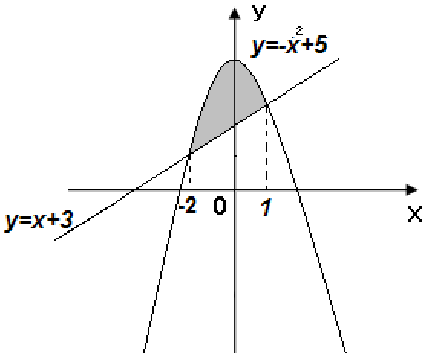
№1 Вычислить площадь:



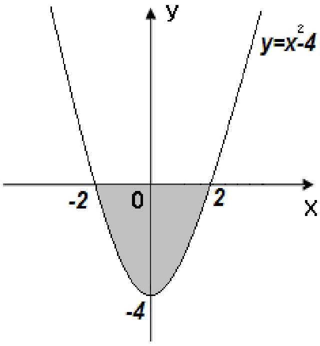


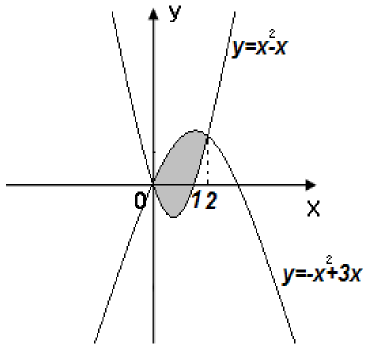
№2 Вычислить площадь:



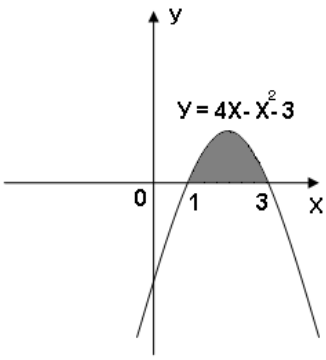


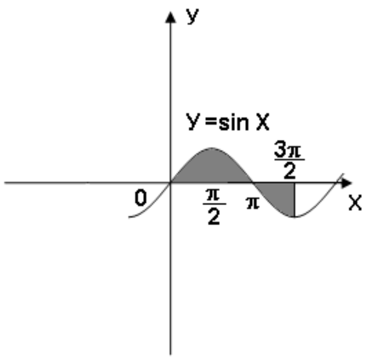
№3 Вычислить площадь :





№4 Вычислить площадь:



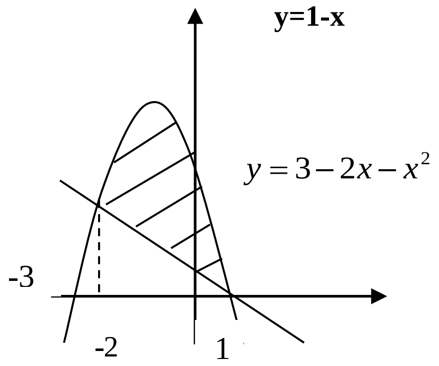


Контрольные вопросы

1. Приведите определение криволинейной трапеции.
2. В чём геометрический смысл определённого интеграла?
3. Выберите формулу площади заштрихованной фигуры:

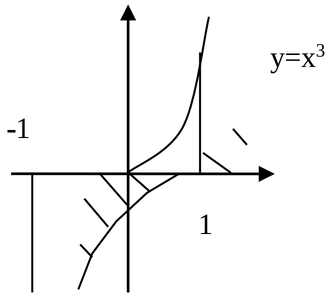
$$\text{А. } \int_{-3}^{-2}\left(3-2x-x^2\right)dx+\int_{-2}^{1}\left(1-x\right)dx$$

$$\text{Б. } \int_{-2}^{1}\left(3-2x-x^2\right)dx-\int_{-2}^{1}\left(1-x\right)dx$$



В. $\int_{-2}^{1}(1-x)dx - \int_{-2}^{1}(3-2x-x^2)dx$

4. **Составьте формулу для вычисления площади изображённой фигуры**



Раздел 8. Измерения в геометрии
Тема 8.1. Измерения в геометрии

Практическое занятие №23. Решение задач
количество часов <u>1</u>
Цель: рассмотреть задачи на вычисление объемов и площадей геометрических тел, показать практическую направленность математики
Задача закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому заняти
1. Призма -это тело, ограниченное многогранной поверхностью, две грани которой суть n-угольники, а остальные n-параллелограммы.
2. Призма, основанием которой служит параллелограмм, называется параллелепипедом
3. Пирамида – это многогранник, у которого одна грань (основание пирамиды) – это произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые грани) треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды параллелепипеда
4. Объем прямого параллелепипеда $V=S_{осн}H$
5. Объем прямоугольного параллелепипеда $V=abc$
6. Пирамида – это многогранник, у которого одна грань (основание пирамиды) – это произвольный многоугольник, а остальные грани (боковые грани), треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамида

Объём пирамиды $V = \frac{1}{1} S_{осн} H$

Объём усеченной пирамиды $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2$

7. Тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону, называется цилиндром.

Объём цилиндра $V = S_{осн} H = \pi r^2 H$

Площадь цилиндра $S_{бок} = 2\pi RH$, $S_{полн} = 2\pi R(R+H)$

8. Фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси содержащей его катет, называется конусом.

Объём конуса $V = \frac{1}{3} S_{осн} H = \frac{1}{3} \pi r^2 H$

Площадь конуса $S_{бок} = \pi Rl$, $S_{полн} = \pi R(R+l)$

9. Часть конуса, заключенная между его основанием и сечением, плоскость которого перпендикулярна высоте конуса, называется усеченным конусом.

Площадь усечённого конуса $S_{бок} = \pi(R+r)l$

10. Тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии не большем данного, от данной точки называется шаром.

Объём шара $V = \frac{3}{4} \pi r^3$

Площадь шара $S = 4\pi r 2$

Задания для практического занятия:

1. Три латунных куба с ребрами 3см, 4см и 5см переплавлены в один куб. Найти ребро этого куба.
2. Требуется установить резервуар для воды емкостью 10м3 на площадке размером 2,5 на 1,75м служащей для него дном. Найти высоту резервуара.
3. Деревянная плита в форме правильного восьмиугольника со стороной 3,2см и толщиной 0,7 см имеет массу 17,3г. Найти плотность дерева.
4. В прямой треугольной призме стороны оснований равны4см, 5см и 7см. Боковое ребро равно большей высоте основания. Найти объем пирамиды.
5. Площадь основания прямой треугольной равна 4см2, а площади боковых граней 9см2, 10см2, 17см2. Найти объем призмы.
6. Основание пирамиды прямоугольник со сторонами 9м и 12м, все боковые ребра равны 12,5м. Найти объем пирамиды.
7. Жидкость налитая в конический сосуд высотой 0,18м и диаметром основа- ния 0,24 м переливается в цилиндрический сосуд, диаметр основания ко- торого 0,1м. Как высоко будет стоять уровень жидкости в сосуде?
8. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4см и 22см, и равновели- кий цилиндр имеют одну и ту же высоту. Найти радиус основания этого цилиндра.

10. Требуется переплавить в один шар два чугунных шара с диаметрами 25см и 35см. Найти диаметр нового шара.

11. 25м медной проволоки имеют массу 100,7г. Найдите диаметр проволоки, если плотность меди 8,924г/см3

12. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.

Контрольные вопросы.

1. Что такое шаровой сегмент?
2. По какой формуле вычисляется площадь боковой поверхности сферы.
3. Какие фигуры называются равновеликими?
4. Что является осевым сечением цилиндра?
5. Что называется сферой, шаром?
6. При вращении какой фигуры получается усеченный конус?

.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .

2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 9. Статистика и теория вероятностей
Тема 9.1. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Практическое занятие №24. Вычисление вероятности по классическому определению количество часов 1

Цель: научиться вычислять вероятность осуществления случайного события по формуле классического определения вероятности

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Классическое определение вероятности.

Если исходы опыта *равновозможны*, то вероятностью события A называется отношение числа исходов, *благоприятствующих* данному событию, к числу всех возможных исходов опыта, т.е. $P(A) = \frac{m}{n}$

где m– число исходов опыта, благоприятствующих событию, n– число всех возможных исходов.

Свойства вероятностей

1. Вероятность любого события — есть число, заключенное между нулем и единицей, т.е. $0 \le P(A) \le 1$. Вероятность невозможного события равна 0, а вероятность достоверного события равна 1.
2. Если события A и B *несовместны*, то *P(A+B) P(A)+P(B)*
3. Вероятность любого события A в сумме с вероятностью противо- положного события $\bar{A}$ равна единице: *P(A)+P(B)=1.*

Если вероятность интересующего нас события A по каким-либо причинам вычислить трудно, то можно попытаться вычислить вероятность противоположного события, а затем с помощью свойства 3 вычислить искомую вероятность события A.

Пример №1

Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

A – на обеих костях выпало одинаковое число очков;

B – сумма числа очков не меньше 11;

C – число очков на первой кости больше, чем на второй;

D – сумма очков четная;

E – сумма числа очков больше трех.

Решение. Число очков, благоприятствующих каждому из названных событий, легко подсчитать, если все возможные исходы опыта перечислить в виде табл. 2.1.1. В каждой клетке таблицы первая цифра указывает число очков на первой кости, вторая — на второй кости.

Таблица 2.1.1

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Если кости симметричны и однородны, то все перечисленные исходы опыта равновозможны. Тогда $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ (благоприятствуют исходы: 11, 22, 33, 44, 55, 66), $P(B)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$(благоприятствуют три исхода: 56, 65, 66) Непосредственный подсчет числа благоприятствующих исходов дает

$P(C)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}, P(D)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}, P(E)=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$.

Ответ. $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(C)=\frac{5}{12}, P(D)=\frac{1}{2}, P(E)=\frac{11}{12}$

Пример 2.

На завод привезли партию из 1000 подшипников. Случайно в эту партию попало 30 подшипников, не удовлетворяющих стандарту. Определить вероятность Р(А) того, что взятый наудачу подшипник окажется стандартным.

Решение: Число стандартных подшипников равно 1000—30=970. Будем считать, что каждый подшипник имеет одинаковую вероятность быть выбранным. Тогда полная группа событий состоит из N=1000 равновероятных исходов, из которых событию А благоприятствуют M=970 исходов. Поэтому P(A)=M/N=970/1000=0.97

Пример 3.

В урне 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны вынимают сразу два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Решение: Число N всех равновероятных исходов испытания равно числу способов, которыми можно из 10 шаров вынуть два, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 2:

$$N=C_{10}^{2}=\frac{10!}{2!(10-2)!}=45$$

Число благоприятствующих исходов:

$$M=C_{3}^{2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}=3$$

Следовательно, искомая вероятность:

$$P(A)=\frac{M}{N}=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$$

Пример 4.

В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?

Решение: Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров:

Р(зел.)=2/24; Р(кр.)=7/24; Р(кор.)=5/24. Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:

$$P_{цв.=}P_{(зел.)}+P_{(кр.)}+P_{(кор.)}=\frac{2}{24}+\frac{7}{24}+\frac{5}{24}=\frac{14}{24}=\frac{7}{12}$$

Задания для практического занятия:

1 вариант.

1. В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
2. В цехе работают 10 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы 2 шара оказались белыми, а один черным?
4. Отдел технического контроля обнаружил 15 бракованных ламп в партии из случайно отобранных 200 ламп. Найти относительную частоту появления бракованных ламп.
5. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,8. найти число годных приборов, если всего было проверено 250 приборов.

2 вариант.
1. В урне имеется 20 шаров, среди которых 12 красного цвета. Из урны наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что извлеченные шары не красные.
2. В партии из 15 деталей имеется 3 стандартных. Наудачу отобраны 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно 2 стандартных.
3. В группе 20 юношей и 10 девушек. Сколькими способами можно избрать трех юношей и двух девушек для участия в слете студентов?
4. По цели произведено 40 выстрелов, причем зарегистрировано 37 попаданий. Найти относительную частоту промахов.
5. При испытании партии телевизоров относительная частота бракованных телевизоров оказалась равной 0,15. найти число качественных телевизоров, если было проверено 400 телевизоров.

3 вариант.
1. В ящике 100 деталей, из них 18 бракованных. Наудачу извлечены4 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей нет бракованных.
2. На складе имеется 25 кинескопов, причем 15 из них изготовлены Минским заводом. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу кинескопов окажутся 4 кинескопа Минского завода.
3. В урне 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно наугад вынуть 3 шара, чтобы один шар оказался белыми, а два черным?
4. По цели произведено 30 выстрелов, причем зарегистрировано 28 попаданий. Найти относительную частоту попаданий в цель.
5. При проверке качества электрических лампочек оказалось, что относительная частота бракованных лампочек равна 0,2. Найти число качественных электрических лампочек, если всего было проверено 600 лампочек.

Контрольные вопросы .

1. Какое событие называют достоверным?
2. Какое событие называют невозможным?
3. Дайте определение противоположных событий.
4. Сформулируйте классическое определение вероятности.
5. Чему равна вероятность достоверного события?
6. Чему равна вероятность невозможного события?
7. Каким неравенствам удовлетворяет вероятность любого события?
8. Что называется относительной частотой события?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №25. Решение задач на повторные испытания
количество часов 1

Цель: закрепить умения вычислять вероятности событий, решая прикладные задачи
Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Теория вероятностей имеет дело с такими экспериментами, которые можно повторять (по крайней мере теоретически) неограниченное число раз. Пусть некоторый эксперимент повторяется n раз, причем результаты каждого повторения не зависят от исходов предыдущих повторений. Такие серии повторений называют независимыми испытаниями. Частным случаем таких испытаний являются ***независимые испытания Бернулли***, которые характеризуются двумя условиями:
1) результатом каждого испытания является один из двух возможных исходов, называемых соответственно «успехом» или «неудачей».

2) вероятность «успеха», в каждом последующем испытании не зависит от результатов предыдущих испытаний и остается постоянной.
Схему испытаний Бернулли называют также биномиальной схемой, а соответствующие вероятности – биномиальными, что связано с использованием биномиальных коэффициентовC_n^m .

Теорема Бернулли

Если производится серия из независимых испытаний Бернулли, в каждом из которых «успех» появляется с вероятностью , то вероятность того, что «успех» в испытаниях появится ровно раз, выражается формулой:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

где $g = 1 - p$ – вероятность «неудачи».
C_n^k .– число сочетаний элементов по (см. основные формулы комбинаторики)
Эта формула называется ***формулой Бернулли***.
Формула Бернулли позволяет избавиться от большого числа вычислений — сложения и умножения вероятностей - при достаточно большом количестве испытаний.
Если число испытаний *n* велико, то пользуются:

- локальной формулой Муавра - Лапласа
- интегральной формулой Муавра - Лапласа
- формулой Пуассона

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

ПРИМЕР 1

Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Какова вероятность того, что из 10 посеянных семян взойдут: 8, по крайней мере 8; не менее 8?

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся формулой Бернулли:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

В нашем случае n=10; p=0,7.
Пусть событие *A* – из 10 семян взойдут 8:

$$P(A) = P_{10}(8) = C_{10}^8 \cdot 0.7^8 \cdot 0.3^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} \cdot 0.7^8 \cdot 0.3^2 = \frac{9 \cdot 10}{2} \cdot 0.7^8 \cdot 0.3^2 = 0.2335$$

Пусть событие *B* – взойдет по крайней мере 8 (это значит 8, 9 или 10)

$$P(B) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}^{10} = 0.2335 + C_{10}^9 \cdot 0.7^9 \cdot 0.3 + C_{10}^{10} \cdot 0.7^{10} \cdot 0.3^0 =$$

Пусть событие – взойдет не менее 8 (это значит 8,9 или 10)

$$P(C) = P(B) = 0.3828$$

Ответ: *P(A)*=0.2335; *P(B)*=0.3828; *P(C)*=0.3828

ПРИМЕР 2

В результате обследования были выделены семьи, имеющие по четыре ребенка. Считая вероятности появления мальчика и девочки в семье равными, определить вероятности появления в ней:
а) одного мальчика;
б) двух мальчиков.

РЕШЕНИЕ

Вероятность появления мальчика или девочки равна$p = \frac{1}{2}$. Вероятность появления мальчика в семье, имеющей четырех детей, находится по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

В нашем случае:

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.25$$

б) Вероятность появления в семье двух мальчиков:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.375$$

Ответ: а) *p=0,25;* б)*p=0,375* .

ПРИМЕР 3

Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

РЕШЕНИЕ

Играют равносильные шахматисты, поэтому вероятность выигрыша $p=\frac{1}{2}$, следовательно вероятность проигрыша тоже равна $\frac{1}{2}$. Так как во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, то применима формула Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

а) Вероятность выиграть 1 партию из двух:

$$P_2(1) = C_2^1 \cdot 0.5^1 \cdot 0.5^1 = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5$$

Вероятность выиграть 2 партии из четырех:

$$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 = 0.375$$

Вероятнее выиграть одну партию из 2-х.

б) Вероятность выиграть не менее 2-х партий из 4:

$$P = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = C_4^2 \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2 + C_4^3 \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^1 + C_4^4 \cdot 0.5^4 \cdot 0.5^0 =$$
$$= \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot 0.5^4 + 4 \cdot 0.5^4 + 1 \cdot 0.5^4 = 0.6875$$

Вероятность выиграть не менее 3-х партий из 5:

$$P = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \cdot 0.5^3 \cdot 0.5^2 + C_5^4 \cdot 0.5^4 \cdot 0.5 + C_5^5 \cdot 0.5^5 \cdot 0.5^0 =$$
$$= \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 0.5^5 + 5 \cdot 0.5^5 + 1 \cdot 0.5^5 = 0.5$$

Вероятнее выиграть не менее 2-х партий из 4.

Ответ: а) Вероятнее выиграть одну партию из 2-х; б) Вероятнее выиграть не менее 2-х партий из 4.

Задания для практического занятия:

ЗАДАЧА 1

Всхожесть семян данного сорта имеет вероятность 0.7. Оценить вероятность того, что из 9 семян взойдет не менее 4 семян.

ЗАДАЧА 2

Найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие А появится ровно k раз, зная, что в каждом испытании вероятность появления события равна p.

ЗАДАЧА 3

а) Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4. б) событие В появится в случае, если событие А наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события В, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,8.

ЗАДАЧА 4

В ралли участвует 10 однотипных машин. Вероятность выхода из строя за период соревнований каждой из них 1/20.

Найти вероятность того, что к финишу придут не менее 8 машин.

Контрольные вопросы .

1.Что такое «повторные независимые испытания»?

2. Напишите формулу Бернулли.

3. Что такое биноминальное распределение?
4. В каких случаях можно использовать приближения формулы Бернулли?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №26. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков количество часов 1

Цель: Изучить технологию построения графиков и диаграмм на основе табличных данных. Научится строить различные типы диаграмм и графиков.Освоить приемы форматирования и редактирования графиков и диаграмм.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Теория вероятностей занимается изучением математических моделей случайных явлений. Имея подходящую математическую модель какого-либо случайного явления, мы можем рассчитывать вероятности тех или иных событий и по этим вероятностям, мы можем, пользуясь статистической устойчивостью частот, предсказывать частоты этих событий. Если вероятностная модель выбрана правильно, то такие предсказания будут выполняться со случайными ошибками, которые также можно рассчитывать в рамках выбранной модели.

Математическая статистика — наука о математических методах анализа статистических данных, полученных при проведении массовых наблюдений. Математическая статистика выделяется из теории вероятностей в самостоятельную область, хотя основные методы и приёмы рассуждений в ней остаются теми же самыми. Причиной этого является специфичность задач математической статистики, являющихся, в известной мере, обратными к задачам теории вероятностей.

Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практичных выводов. Отметим два основных метода анализа статистических данных: 1) оценка неизвестной вероятности события; оценка неизвестной функции распределения; оценка параметров распределения, вид которого неизвестен. 2) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен.

Основная задача математической статистики заключается в получении выводов о массовых явлениях по данным наблюдений над ними и экспериментов. Эти статистические выводы представляют собой утверждения об общих характеристиках этих явлений (вероятностях, законах распределения и их параметрах, математических ожиданиях, дисперсиях и т.д.). **Цель математической статистики** – оценить характеристики генеральной совокупности по каким-то выборочным данным. Свойства генеральной совокупности, обычно, неизвестны и все выводы о генеральной совокупности делаются исключительно по выборке.

Этапы статистического исследования:

-сбор информации
-обобщение и систематизация
-составление таблиц

Статистическая информация может быть представлена в различных формах:

- простой статистический ряд
-вариационный (упорядоченный) ряд
-таблица частот
-таблица относительных частот

-интервальный ряд
-графическая форма

Наглядное представление информации.

-столбчатая диаграмма
-круговая диаграмма
-полигон
-гистограмма.

Преимущество представления статистических данных в виде таблиц, диаграмм и графиков.

1.Графики производят более сильное впечатление, чем цифры.
2.Позволяет лучше осмыслить результаты статистического наблюдения.
3.Помогают правильно истолковать результаты статистического анализа.
4. Значительно облегчают понимание статистического материала.
5.Делают его наглядным и доступным.

Задача.

У 50 рабочих городского предприятия попросили оценить время, которое они в среднем тратят на проезд от дома до работы. Получились следующие данные в минутах (с точностью до 10 минут).

20	100	20	30	40	50	30	80	90	40
30	50	20	50	30	30	50	60	60	50
30	40	60	50	100	60	90	10	20	50
90	80	20	40	50	10	50	40	30	40
60	120	30	40	60	20	60	10	50	60

Решение:

Выборка – это то, что выбрали

Общий ряд данных_- это ряд всех значений измерения, заключённых в промежутке от наименьшего возможного до наибольшего возможного значений.

Ряд данных: 10,20,30,40,50,60,70,80,90,100,110,120.

Ряд данных измерения - это ряд из всех его вариант.

Варианта измерения - это один из результатов того, что выбрали.

20	100	20	**30**	**40**	**50**	30	**80**	**90**	40
30	50	20	50	30	30	50	**60**	60	50
30	40	60	50	**100**	60	90	**10**	20	50
90	80	20	40	50	10	50	40	30	40
60	**120**	30	40	60	20	60	10	50	60

Ряд данных измерения 10,20,30,40,50,60,80,90,100,120.

Группировка данных измерения

Кратностью варианты измерения называется число k, которое показывает, сколько раз встретилась варианта среди всех данных.

2	10	2	3	4	5	3	8	9	4
3	5	2	5	3	3	5	6	6	5
3	4	6	5	10	6	9	1	2	5
9	8	2	4	5	1	5	4	3	4
6	12	3	4	6	2	6	1	5	6

Запишем общий ряд данных: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.
Сгруппированный ряд данных.
1,1,2,…,2,3,…,3,4,…4,5,…,5,6,…,6,8,8,8,9,9,10,10,12

2)Табличное представление информации.

Таблиц распределения данных

варианта	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	сумма
кратность	3	6	8	7	10	8	3	2	2	1	50

Объём измерения - сумма всех кратностей или количество всех данных измерения.

Частота варианты измерения.

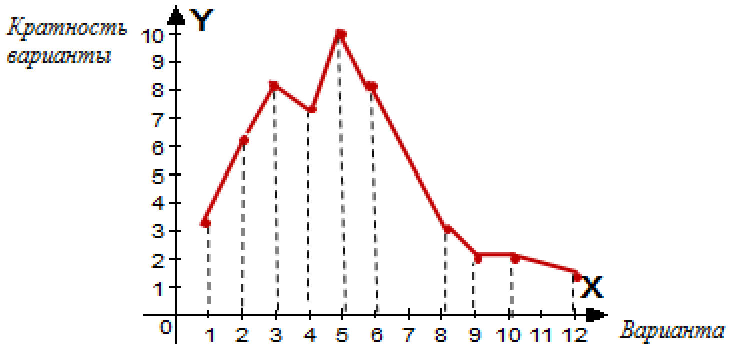
Частотой варианты называется отношение её кратности к объёму измерения.

Таблица распределения частот измерения

варианта	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	сумма
кратность	3	6	8	7	10	8	3	2	2	1	50
частота варианты	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,06	0,04	0,04	0,02	1
частота, %	6	12	16	14	2	16	6	4	4	2	100

3) Графическое представление информации.

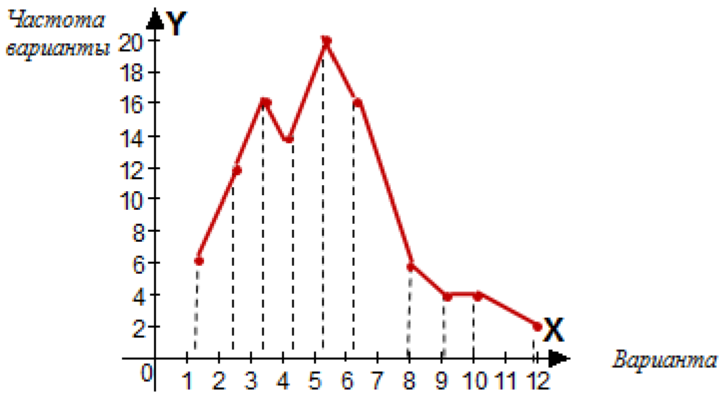
варианта (по оси ОХ)	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
кратность (по оси ОУ)	3	6	8	7	10	8	3	2	2	1



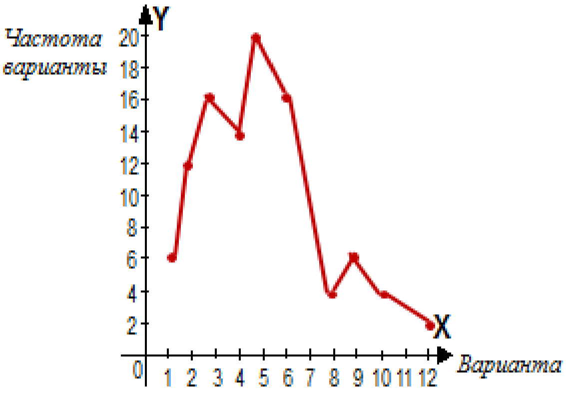
Полигон (многоугольник) распределения данных

Полигон частот в процентах

варианта (по оси ОХ)	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
частота, %(по оси ОУ)	6	12	16	14	2	16	6	4	4	2



Рассмотрим полигон распределения частот



Размахом измерения называется разность между максимальной и минимальной вариантами.
Размах 12дес.-1дес.=11дес (110 мин)
Модой измерения называется варианта, которая в измерении встретилась чаще.
Мода 50 мин.
Медианой измерения называется варианта, которая стоит в ряду данных, расположенных по возрастанию, в середине, если количество вариант нечётно. В случае чётности количества вариант медиана равна среднему арифметическому двух средних вариант ряда данных.
Медиана (5+6):2=5,5

4) Числовые характеристики данных измерения.

Средним значением данных называется их среднее арифметическое.
Таблица распределения данных

варианта	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	сумма
кратность	3	6	8	7	10	8	3	2	2	1	50

Для нахождения среднего значения нужно:
1)просуммировать все данные измерения;
2)полученную сумму разделить на количество данных.
$(1\cdot3+2\cdot6+3\cdot8+4\cdot7+5\cdot10+6\cdot8+8\cdot2+9\cdot3+10\cdot2+12\cdot1):50=4{,}8$
48 мин

Таблица распределения частот измерения

варианта	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	сумма
частота варианты	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,06	0,04	0,04	0,02	1

Для нахождения среднего значения можно:
1)каждую варианту умножить на её частоту;
2)сложить все полученные произведения.

$1\cdot0{,}06+2\cdot0{,}12+3\cdot0{,}16+4\cdot0{,}14+5\cdot0{,}2+6\cdot0{,}16+8\cdot0{,}04+9\cdot0{,}06+10\cdot0{,}04+12\cdot0{,}02=4{,}8$

Задания для практического занятия:
Задание 1.
В таблице представлен объем экспорта естественного газа из России в некоторые страны мира в 2001 г.

Страны	Экспорт газа из России в 2001 г., млрд. куб. м	Страны	Экспорт газа из России в 2001 г., млрд. куб. м

Литва	2,68	Швейцария	0,34
Латвия	1,46	Турция	11,12
Эстония	0,82	Финляндия	4,64
Австрия	4,91	Франция	11,15
Болгария	3.32	Чехия	7,46
Венгрия	8,10	Словакия	7,52
Италия	20,20	Югославия	1,57
Германия	32,60	Нидерланды	0,13
Польша	7,51	Греция	1,52
Румыния	2,88		

По данным таблицы укажите:
а) наиболее крупных потребителей российского газа (более 10 млрд. куб. м);
б) государства, которые в 2001 г. получили менее 1 млрд. куб. м.;
в) общий объем газа, экспортированного в 2001 г. в указанные страны.

Задание 2.

Участники Интернет - форума указали города, где они проживают. Получился следующий список:

Москва, Смоленск, Москва, Москва, С.-Петербург, Челябинск, Назрань, Москва, Норильск, Уфа, Москва, Волгоград, С.-Петербург, Ногинск, Москва, Москва, Челябинск, Москва, С.-Петербург, С.-Петербург, Москва, Челябинск, Дмитров, Москва, Ижевск, Мурманск, Волгоград, Москва, Ярославль.

Составьте таблицу подсчета и таблицу распределения участников форума по городам.

Задание 3.

В таблице собраны данные о дальности перелётов некоторых летающих животных.

Животное	Расстояние, км
Колибри	800
Летучая мышь	1100
Перелетная саранча	2200
Бурокрылая ржанка	3300
Американская ржанка	5500

Постройте столбиковую диаграмму по этим данным.

Задание 4.

Таблица 2. Как часто школьники 7-9 классов покупают шоколад?

Регулярность покупки	Москва	Казань	Екатеринбург	Красноярск
Реже раза в неделю	15%	8%	35%	28%

Раз в неделю	32%	28%	21%	19%
Два раза в неделю	22%	32%	23%	33%
По-другому	31%	32%	21%	20%

Постройте круговые диаграммы по данным Таблицы 2 для Казани и Екатеринбурга.

Контрольные вопросы

1. Порядок построения диаграммы.
2. Как изменить параметры уже построенной диаграммы?
3. Какие действия можно выполнить с диаграммой?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 10. Уравнения и неравенства
Тема 10.1. Уравнения и неравенства

Практическое занятие №27. Решение уравнений методом разложения на множители количество часов 1

Цель: закрепление знаний и умений раскладывать многочлен множители, используя все известные учащимися способы при решении уравнений (в том числе уравнений с модулем)

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Разложить многочлен на множители значит представить его в виде произведения более простых многочленов.

Существует несколько способов разложения:

1.Вынесение общего множителя за скобки
2.Способ группировки
3.С помощью формул сокращенного умножения

Практическое применение

Сначала убедимся в том, что разложение на множители – вещь полезная. Вам предлагают решить уравнение:
$2x^2 + x – 6=0$.
Для таких уравнений имеется специальное правило решения, но вы его пока еще не знаете. Как быть? Воспользуемся разложением многочлена на множители:
$2x^2 + x – 6=(2x – 3)(x + 2)$
Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$(2x – 3) (x + 2)=0$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Значит,

либо $2x – 3 = 0$,
либо $x + 2 = 0$.

Из первого уравнения x=1,5, а из второго уравнения x = -2 .
Уравнение решено, оно имеет два корня: –2 и 1,5
Рассмотрим другую ситуацию:
Пусть нужно найти значение числового выражения

$$\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2}$$

Самое эффективное решение – дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2} = \frac{(53-47)(53+47)}{(61-39)(61+39)} = \frac{6 \bullet 100}{22 \bullet 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

Разложение на множители позволило нам сократить дробь. Позднее мы оценим это и при выполнении действий с алгебраическими дробями.

Таким образом, разложение многочлена на множители используется для решения уравнений, для преобразования числовых и алгебраических выражений. Применяется оно и в других ситуациях, как, скажем, в следующем довольно трудном, но красивом примере, где ключ к успеху опять-таки в разложении на множители.

Пример

Доказать, что для любого натурального числа n выражение n^3+3n^2+2n делится без остатка на 6.

Попробуйте его решить.

Посмотрите, как легко это можно сделать:

$P = n^3+3n^2+2n$.

Если $n=1$, то $P = 1+3+2=6$. Значит, P делится на 6 без остатка.

Если $n=2$, то $P = 2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2 = 8+12+4 = 24$. Следовательно, и P делится на 6 без остатка.

Если $n=3$, то $P = 3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3 = 27+27+6 = 60$. Поэтому и P делится на 6 без остатка.

Но вы же понимаете, что перебрать так все натуральные числа нам не удастся. Как быть? На помощь приходят алгебраические методы.

Имеем: $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$.

В самом деле $n(n+1) = n^2+ n$, а $(n^2+n)(n+2) = n^3+2n^2+n^2+2n = n^3+3n^2+2n$.

Итак, $P = n(n+1)(n+2)$, т.е. $p(n)$ есть произведение трех идущих подряд натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$. Но из трех таких чисел одно обязательно делится на 3, значит и их произведение делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из этих чисел – четное, т.е. делится на 2. Итак, P делится и на 2, и на 3, т.е. делится на 6.

Все прекрасно, скажите вы, но как догадаться, что $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$?

Ответ очевиден: надо учиться разложению многочленов на множители.

Алгоритмы:

Вынесение общего множителя за скобки

Алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов

1.Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, - он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).

2.Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.

3.Произведение коэффициента и переменной, найденного на первом и втором шагах, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.

Пример

Разложить на множители:

$-x^4y^3-2x^3y^2+5x^2$.

Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

1.Наибольший общий делитель коэффициентов –1, -2 и 5 равен 1.

2.Переменная x входит во все члены многочлена с показателями соответственно 4, 3, 2; следовательно, можно вынести за скобки x^2.

3.Переменная y входит не во все члены многочлена; значит, ее нельзя вынести за скобки.

Вывод: за скобки можно вынести x^2. Правда, в данном случае целесообразнее вынести $-x^2$. Получим:

$-x^4y^3-2x^3y^2+5x^2=-x^2(x^2y^3+2xy^2-5)$.

Способ группировки

Для уяснения сути способа группировки рассмотрим следующий пример: разложить на множители многочлен xy-6+3y-2y

Первый способ группировки:
$xy-6+3y-2y=(xy-6)+(3x-2y)$.
Группировка неудачна.
Второй способ группировки:
$xy-6+3y-2y=(xy+3x)+(-6-2y)=x(y+3)-2(y+3)=(y+3)(x-2)$.
Третий способ группировки:
$xy-6+3y-2y=(xy-2y)+(-6+3x)=y(x-2)+3(x-2)=(x-2)(y+3)$.
Ответ: $xy-6+3y-2y=(x-2)(y+3)$.
Как видите, не всегда с первого раза группировка оказывается удачной.
Если группировка оказалась неудачной, откажитесь от нее, ищите иной способ.
По мере приобретения опыта, вы будете быстро находить удачную группировку.
Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения

Вспомните эти формулы:

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a-b)(a+b);}$$
$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);}$$
$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);}$$
$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;}$$
$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.}$$

Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой разность квадратов (безразлично чего: чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью – к выражению, представляющему собой разность (или сумму) кубов; последние две формулы применяются к трехчлену, представляющему собой полный квадрат, т.е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений.
Пример
Разложить на множители
1) x^6-4a^4. Воспользуемся первой формулой (разность квадратов):
$x^6-4a^4 = (x^3)^2-(2a^2)^2 = (x^2-2a^2)(x^3+2a^2)$.
2) a^6+27b^3. Воспользуемся третьей формулой (сумма кубов):
$a^6+27b^3 = (a^2)^3+(3b)^3 = (a^2+3b)((a^2)^2-a^2\cdot 3b+(3b)^2) = (a^2+3b)(a^4-3a^2b+9b^4)$.
3) $a^2-4ab+4b^2$. В этом примере дан трехчлен, для его разложения на множители будем пользоваться пятой формулой, если, конечно, убедимся в том, что трехчлен является полным квадратом:
$a^2-4ab+4b^2 = a^2+(2b)^2-2\cdot a\cdot 2b = (a-2b)^2$.
Мы убедились, что трехчлен содержит сумму квадратов одночленов a и $2b$, а также удвоенное произведение этих одночленов. Значит, это полный квадрат, причем квадрат разности.
Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов
В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т.д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим.
Задания для практического занятия:
Вопрос 1
Разложите на множители: 5ав+в^2.
Варианты ответов
1) 5ав^2 ; 2) в(5а+1); 3) в(5а+в^2); 4) в(5а+в).
Вопрос 2
Разложите на множители: $3cx^2-9c^2x$.
Варианты ответов
1) $cx(3x-9c)$; 2) $3cx(1-3c)$; 3) $3cx(x-3c)$; 4) $3x(cx-9c^2)$.
Вопрос 3
Разложите на множители: 4в^3-5в^5.
Варианты ответов

1) $в^2(4в-5в^3)$;   2) $в^3(4-5в^2)$;   3) $в(4в^2-5в^4)$;   4) $в^3(4+5в^2)$.

Вопрос 4

Разложите на множители: 2у(у-х)+(у-х)

Варианты ответов

1) (у-х)(2у+1);   2) 2у(у-х);   3) (у-х)(2у+у-х);   4) 3у(у-х).

Вопрос 5

Разложите на множители: 2ас+2с+ав+в.

Варианты ответов

1) (а+1)(2с+в);   2) а(2с+в);   3) 2с(а+1);   4) (2с-в)(а+1).

Вопрос 6

Разложите на множители: $в(в-2)^2+в^2(2-в)$.

Варианты ответов

1) (в-2)(в-4); 2) в(2-в)(2-2в);   3) 2в(2-в);   4) 2в(2+в).

Контрольные вопросы   .

1.Что значит, разложить многочлен на множители?
2. В каком случае произведение множителей равно 0?
3. Какие приёмы разложения на множители вам известны? *(Вынесение общего множителя за скобки, группировка слагаемых с последующем вынесением общего множителя, с помощью формул сокращенного умножения)*.
4. Чему равны квадрат суммы, разности двух слагаемых?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №28. Основные приемы решения уравнений и систем уравнений : графический метод

количество часов <u>1</u>

Цель: формирование умение решать графическим методом, используя его математическую модель. Формирование графической культуры в ходе выполнения построений.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Для решения систем линейных уравнений существует графический метод. Однако чтобы решить графическим методом систему линейных уравнений, приходится прикладывать гораздо больше усилий, чем при решении методом алгебраического сложения или даже методом подстановки. Тем не менее графические соображения могут сильно помочь в определении количества решений системы уравнений или даже одного уравнения.

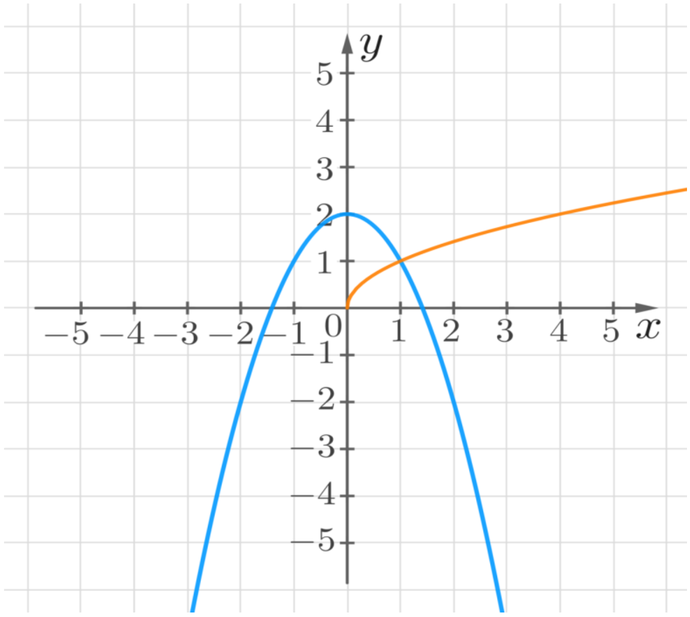
Решить систему уравнений или уравнение означает найти все решения (или корни) и убедиться, что других решений нет. Случается, что какое-то одно решение (число или пара чисел, если это система с двумя неизвестными) очевидно угадывается и легко проверяется. Куда сложнее понять и доказать, что найденное решение единственно. И вот в этом может помочь графический метод.

Пример 1. Решите уравнение $2 - x^2 = \sqrt{x}$.

Решение. Заметим, что x=1 при уравнение обращается в верное равенство. Действительно:

$$2 - 1^2 = \sqrt{1}$$

Построим графики функций $y = 2 - x^2 u\ y = \sqrt{x}$ (см. рисунок 1).



Как мы видим, графики пересекаются только в одной точке, значит, система уравнений

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение. Но при решении этой системы методом подстановки мы пришли бы к исходному уравнению. А значит, у этого уравнения есть только один корень. И этот корень мы уже угадали. Итак, уравнение имеет единственное решение *x=1* .

Заметим, что поскольку корень этот “удачный” (это все-таки небольшое и притом целое число), то мы могли его и не угадывать с самого начала, а разглядеть на графике и проверить подстановкой. Проверка корней путём подстановки в исходное уравнение (систему уравнений) является *обязательным* этапом графического решения.

Пример 2. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 = y + 4|x| - 4 \\ y + 3 = \lceil |x| - 3 \rceil \end{cases}$$

Решение. На первый взгляд система кажется очень сложной. Именно в таких случаях не следует спешно бросаться решать её алгебраическим способом, сначала нужно попытаться проанализировать уравнения в системе, подумать, как можно их преобразовать и привести к более простому и понятному виду. Заметим, что в обоих уравнениях переменная встречается лишь единожды, причём в первой степени. Попробуем её выразить, начнём с первого уравнения:

$$x^2 = y + 4|x| - 4 \Leftrightarrow y = y - 4|x| + 4 \Leftrightarrow |x^2| - 4|x| + 4 \Leftrightarrow y = (|x| - 2)^2$$

Теперь второе уравнение:

$$y + 3 = \big||x| - 3\big| \Leftrightarrow y = \big||x| - 3\big| - 3$$

Итак, наша система теперь выглядит следующим образом

$$\begin{cases} y = (|x| - 2)^2 \\ y = \big||x| - 3\big| - 3 \end{cases}$$

Построим графики обеих функций в одной системе координат (см. рисунок 2).

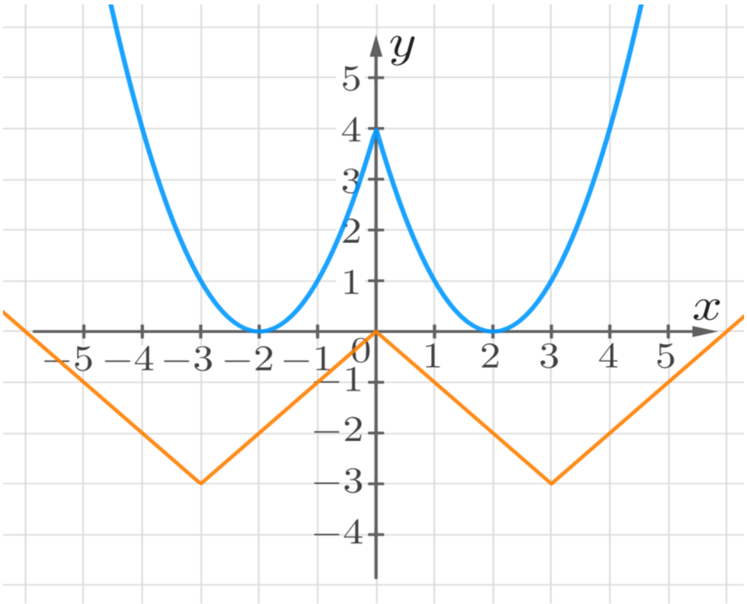


Рис. 2

Как мы видим, графики этих функций не имеют общих точек. Значит, и исходная система не имеет решений.

Задания для практического занятия:

Решите графически уравнение .$\left||x|-2\right| = \sqrt{4-x}$

Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - xy + x - y = 0 \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Контрольные вопросы .

1. Что такое система линейных уравнений?
3. Что является ее решением?
4. Какой метод решения систем линейных уравнений сегодня узнали?
5. Расскажите алгоритм решения системы линейных уравнений с помощью графического метода.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №29. Показательные и логарифмические уравнения
количество часов 1

Цель: повторить и обобщить решение показательных, логарифмических уравнений

задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

1. Показательные уравнения.

Уравнения, содержащие неизвестные в показателе степени, называются **показательными уравнениями**. Простейшим из них является уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

1) При $b < 0$ и $b = 0$ это уравнение, согласно свойству 1 показательной функции, не имеет решения. 2) При $b > 0$ используя монотонность функции и теорему о корне, уравнение имеет

2) единственный корень. Для того, чтобы его найти, надо b представить в виде $b = a^c$, $a^x = b^c \Leftrightarrow x = c$ или $x = \log_a b$.

Показательные уравнения путем алгебраических преобразований приводят к стандартным уравнения, которые решаются, используя следующие методы:

1) метод приведения к одному основанию $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$;
2) метод введения новых переменных;
3) метод разложения на множители;

2. Метод приведения к одному основанию.

Способ основан на следующем свойстве степеней: если равны две степени и равны их основания, то равны и их показатели, т.е. уравнение надо попытаться свести к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$

<u>Примеры.</u> Решить уравнение:

1. $3^x = 81$;

Представим правую часть уравнения в виде $81 = 3^4$ и запишем уравнение, равносильное исходному $3^x = 3^4$; $x = 4$. Ответ: 4.

2. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x+1} = \left(\frac{7}{3}\right)^{5x-3}$

Представим правую часть уравнения в виде $\left(\frac{3}{7}\right)^{3-5x}$ и перейдем к уравнению для показателей степеней $3x+1 = 3 - 5x$; $8x = 4$; $x = 0{,}5$. Ответ: 0,5.

3. $5^{x^2-3x+2} = 1$

Представим правую часть данного уравнения в виде $1 = 5^0$ и перейдем к уравнению для показателей степеней $x^2-3x+2 = 0$, откуда легко получить решения $x = 1$ и $x=2$.

Ответ: 1 и 2.

3. Метод введения новых переменных.

Метод описан в п. 2.1. Введение новой переменной (подстановка) обычно производится после преобразований (упрощения) членов уравнения. Рассмотрим примеры.

<u>Примеры.</u> Решить уравнение:

1. $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$.

Перепишем уравнение иначе: $\frac{3 \cdot (5^x)^2}{5} - 2 \cdot \frac{5^x}{5} = 0{,}2$

Обозначим $5^x = t > 0$, тогда $\frac{3}{5} \cdot t^2 - \frac{2}{5} \cdot t = \frac{1}{5}$, т.е. $3t^2 - 2t - 1 = 0$, отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{1}{3}$-не удовлетворяет условию $t > 0$. Итак, $5^x = 1 = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$. Ответ: 0.

4. Метод разложения на множители.

1. Решите уравнение: $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $5 \cdot 5^x - \frac{1}{5} \cdot 5^x = 24$

Теперь в левой части уравнения вынесем за скобки общий множитель 5^x.

Получим $5^x \cdot \left(5-\frac{1}{5}\right)=5^x \cdot \frac{24}{5}=24$, откуда

$5^x=5 \Leftrightarrow x=1.$

Ответ: 1.

Решение логарифмических уравнений.

Логарифмическим называется уравнение вида log *af(x)* = log *ag(x)*, где а-положит. число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.
Первый метод решения логарифмических уравнений, основанный на определении логарифма.
Общий вид такого уравнения $\log_a f(x)=k$. Это уравнение может быть заменено равносильным ему уравнением $f(x)=a^k$.
Пример. Решите уравнение.
а) $\log_3 x = 4$, пользуемся определением логарифма
$x=3^4=81$
x=81
Ответ: 81
Рассмотрим второй метод потенцирования . Этот метод применяется для уравнений вида
$\log_a f(x)=\log_a g(x)$
и сводится к решению уравнения f(x)=g(x), x должен удовлетворять решению системы

$$\begin{cases} f(x)>0; \\ g(x)>0; \\ a\neq 1, a>0 \end{cases}$$

б) $\log_3 (7x-9)=\log_3 x$
$7x-9=x$
$6x=9$
$x=1{,}5$
Применение формул потенцирования расширяет область определения уравнения. Поэтому необходима проверка корней. Проверим найденные корни по условиям 7x-9>0
x>0
Задания для практического занятия:

Вариант 1

1. Решите уравнение: $2^x = 128$;
2. Решите уравнение: $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$;
3. Решите неравенство: $5^{4x-7} > 1$;
4. Вычислите: $\log_2 16 - \log_8 64$
5. Вычислите: $3^{\log_3 18} - \log_2 \log_3 81$
6. Определите *x*, если :$\log_4 x = -3$
7. Решите неравенство: $\log^2(x-5) \geq 1$;
8. Решите уравнение: $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Вариант 2

1. Решите уравнение: $3^x = 81$;
2. Решите уравнение: $7^{x+2} + 2\cdot 7^{x-1} = 345$;
3. Решите неравенство: $2^{2x-9} < 1$;
4. Вычислите: $\log_3 27 - \log_9 81$;
5. Вычислите: $5^{\log_5 16} - \log_2 \log_4 16$;
6. Определите *x*, если :$\log_3 x = -1$
7. Решите неравенство: $\log^5 (5-2x) < 1$;
8. Решите уравнение: $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;

Вариант 3

1. Решите уравнение: $5^x = 125$;
2. Решите уравнение: $5^x + 3\cdot 5^{x-2} = 140$;
3. Решите неравенство: $0{,}2^{3x-4} > 1$;
4. Вычислите: $\log_4 16 + \log_8 64$;
5. Вычислите: $3^{\log_3 18} - \log_3 \log_2 512$;
6. Определите x, если $\log_7 x = -2$:
7. Решите неравенство: $\log^2(x-1) > 3$;
8. Решите уравнение: $7^{2x} - 8\cdot 7^x + 7 = 0$;

Вариант 4

1. Решите уравнение: $2^x = 256$;
2. Решите уравнение: $3^x - 2\cdot 3^{x-2} = 63$;
3. Решите неравенство: $0{,}7^{x-9} < 1$;
4. Вычислите: $\log_3 81 - \log_2 27$;
5. Вычислите: $5^{\log_5 14} - \log_4 \log_2 16$;
6. Определите x, если $\log_5 x = -3$:
7. Решите неравенство: $\log_4(x-2) \geq 2$;
8. Решите уравнение: $3^{2x} - 10\cdot 3^x + 9 = 0$;

Контрольные вопросы

1. Понятие показательные уравнения
2. Методы решения показательных уравнений
3. Алгоритм решения показательных уравнений методом приведения к одному основанию.
4 Алгоритм решения показательных уравнений методом введения новых переменных.
5. Алгоритм решения показательных уравнений методом введения разложения на множители.
6. Методы решения логарифмических уравнений

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №30. Методы решения систем уравнений
количество часов **1**

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений разными способами: способом подстановки, способом алгебраического сложения, графическим способом

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Метод подстановки

Алгоритм использования метода подстановки при решении системы двух уравнений с двумя переменными х, у.

1. Выразить у через х из одного уравнения системы.
2. Подставить полученное выражение вместо у в другое уравнение системы.
3. Решить полученное уравнение относительно х.

4. Подставить поочередно каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения вместо х в выражение у через х, полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пар значений (х; у), которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шаге.

Переменные х и у, разумеется, равноправны, поэтому с таким же успехом мы можем на первом шаге алгоритма выразить не у через х, а х через у из одного уравнения. Обычно выбирают то уравнение, которое представляется более простым, и выражают ту переменную из него, для которой эта процедура представляется более простой.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Решение.

1) Выразим х черезу из первого уравнения системы: х = 5 - 3у.
2)Подставим полученное выражение вместо х во второе уравнение системы: (5 - 3у) у — 2.
3)Решим полученное уравнение:

$$5y - 3y^2 = 2;$$
$$3y^2 - 5y + 2 = 0;$$
$$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{2}{3}.$$

4) Подставим поочередно каждое из найденных значений у в формулу х = 5 - 3у.

Если $y = \frac{2}{3}$, то $x = 5 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 3.$

5) Пары (2; 1) и $(3; \frac{2}{3})$ решения заданной системы уравнений.

Ответ: (2; 1); $(3; \frac{2}{3})$

Метод алгебраического сложения

Суть метода напомним на следующем примере.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Умножим все члены первого уравнения системы на 3, а второе уравнение оставим без изменения: $\begin{cases} 6x + 3xy + 6 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$

Вычтем второе уравнение системы из ее первого уравнения:

$$(6x + 3xy + 6) - (4y + 3xy + 30) = 0 - 0;$$
$$6x - 4y - 24 = 0;$$
$$3x - 2y - 12 = 0.$$

В результате алгебраического сложения двух уравнений исходной системы получилось уравнение, более простое, чем первое и второе уравнения заданной системы. Этим более простым уравнением мы имеем право заменить любое уравнение заданной системы, например второе. Тогда заданная система уравнений заменится более простой системой:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 3x - 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом подстановки. Из второго уравнения находим $y = \frac{3x - 12}{2}$. Подставив это выражение вместо y в первое уравнение системы, получим

$$2x + x \cdot \frac{3x - 12}{2} + 2 = 0;$$

$$2x + \frac{3x^2 - 12x}{2} + 2 = 0;$$

$$4x + 3x^2 - 12x + 4 = 0;$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$

$$x_1 = 2, \; x_2 = \frac{2}{3}.$$

Осталось подставить найденные значения x в формулу $y = \frac{3x - 12}{2}$.

Если x = 2, то

$$y = \frac{3 \cdot 2 - 12}{2} = -3; \text{ если } x = \frac{2}{3}, \text{ то } y = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 12}{2} = -5.$$

Таким образом, мы нашли два решения системы: $(2; -3)$ и $(\frac{2}{3}; -5)$.

Ответ: $(2; -3); (\frac{2}{3}; -5)$.

Метод введения новых переменных

Суть этого метода при решении систем уравнений та же самая, но с технической точки зрения имеются некоторые особенности, которые мы и обсудим в следующих примерах.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2{,}5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Введем новую переменную - $t = \frac{x}{y}$. Тогда первое уравнение системы можно будет переписать в более простом виде: $t + \frac{1}{t} = 2{,}5$. Решим это уравнение относительно переменной t

$$t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} = 0;$$

$$\frac{2t^2 + 2 - 5t}{2t} = 0;$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0;$$

$$t_1 = 2, \; t_2 = \frac{1}{2}.$$

:

Оба эти значения удовлетворяют условию $2t \neq 0,$, а потому являются корнями рационального уравнения с переменной t. Но $t = \frac{x}{y},$ значит, либо $\frac{x}{y} = 2,$ откуда находим, что x = 2y, либо $\frac{x}{y} = \frac{1}{2},$

Таким образом, с помощью метода введения новой переменной нам удалось как бы «расслоить» первое уравнение системы, достаточно сложное по виду, на два более простых уравнения:
x = 2 y; y — 2x.

Что же дальше? А дальше каждое из двух полученных простых уравнений нужно поочередно рассмотреть в системе с уравнением $x^2 - y^2 = 3$, о котором мы пока не вспоминали. Иными словами, задача сводится к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Надо найти решения первой системы, второй системы и все полученные пары значений включить в ответ. Решим первую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Воспользуемся методом подстановки, тем более что здесь для него все готово: подставим выражение 2y вместо x во второе уравнение системы. Получим

$$(2y)^2 - y^2 = 3;$$
$$4y^2 - y^2 = 3;$$
$$3y^2 = 3;$$
$$y^2 = 1;$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Так как x = 2y, то находим соответственно $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. Тем самым получены два решения заданной системы: (2; 1) и (-2; -1). Решим вторую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Снова воспользуемся методом подстановки: подставим выражение 2x вместо y во второе уравнение системы. Получим

$$x^2 - (2x)^2 = 3;$$
$$x^2 - 4x^2 = 3;$$
$$-3x^2 = 3;$$
$$x^2 = -1.$$

Это уравнение не имеет корней, значит, и система уравнений не имеет решений. Таким образом, в ответ надо включить только решения первой системы.
Ответ: (2; 1); (-2;-1).

Графический метод решения систем уравнений

Метод решения систем уравнения графическим способом представляет собой построение графика для каждого из конкретных уравнений, которые входят в данную систему и находятся в одной координатной плоскости, а также где требуется найти пересечения точек этих графиков. Для решения данной системы уравнений являются координаты этой точки (x; y).

Следует вспомнить, что для графической системы уравнений свойственно иметь либо одно единственное верное решение, либо бесконечное множество решений, либо же не иметь решений вообще.

А теперь на каждом из этих решений остановимся подробнее. И так, система уравнений может иметь единственное решение в случае, если прямые, которые являются графиками уравнений системы, пересекаются. Если же эти прямые параллельны, то такая система уравнений абсолютно не имеет решений. В случае же совпадения прямых графиков уравнений системы, то тогда такая система позволяет найти множество решений.

Ну а теперь давайте с вами рассмотрим алгоритм решения системы двух уравнений с 2-мя неизвестными графическим методом:

- Во-первых, вначале мы с вами строим график 1-го уравнения;
- Вторым этапом будет построение графика, который относится ко второму уравнению;
- В-третьих, нам необходимо найти точки пересечения графиков.
- И в итоге мы получаем координаты каждой точки пересечения, которые и будут решением системы уравнений.

Давайте этот метод рассмотрим более подробно на примере. Нам дана система уравнений, которую необходимо решить:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 \\ y-x=-3 \end{cases}$$

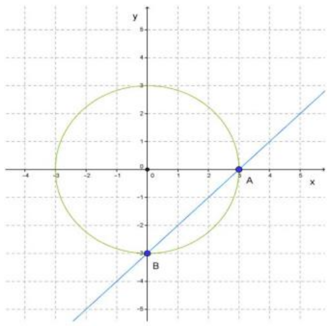
Решение уравнений

1. Вначале мы с вами будем строить график данного уравнения: x2+y2=9.

Но следует заметить, что данным графиком уравнений будет окружность, имеющая центр в начале координат, а ее радиус будет равен трем.

2. Следующим нашим шагом будет построение графика такого уравнения, как: y = x – 3.

В этом случае, мы должны построить прямую и найти точки (0;−3) и (3;0).



Пример 5.Решить систему уравнений: $\begin{cases} x+y=4 \\ \log_2 x+\log_2 y=\log_2 3 \end{cases}$ Решение.ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$.Из первого уравнения можно сделать подстановку: $\begin{cases} y=4-x \\ \log_2 x+\log_2(4-x)=\log_2 3 \Rightarrow x(4-x)=3 \Rightarrow x^2-4x+3=0,\ \ x_1=1,\ \ x_2=3. \end{cases}$ Находим соответствующие значения y: $y_1 = 4 - 1 = 3$, $y_2 = 4 - 3 = 1$. Все найденные решения входят в ОДЗ. Ответ: (1; 3), (3; 1).

Задания для практического занятия:

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+2xy-y^2=0, \\ x^2-3xy=16. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-8=0, \\ x^2+y^2-82=0. \end{cases}$$

Пример 3. Решить следующую систему уравнений методом сложения:

$$\begin{cases} 6x-7y=40 \\ 5y-2x=-8 \end{cases}$$

Пример 4. Решить следующую систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} 2x+3y+5z=10 \\ 3x+7y+4z=3 \\ x+2y+2z=3 \end{cases}$$

Пример 5. Решите следующую систему уравнений методом подстановки:

$$\begin{cases} x-3y=12 \\ 2x+4y=90 \end{cases}$$

Пример 6. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ y=-x^2+2x+5 \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Расскажите алгоритм решения системы линейных уравнений с помощью метод подстановки.
2. Расскажите алгоритм решения системы линейных уравнений с метод алгебраического сложения.
3. Расскажите алгоритм решения системы линейных уравнений с помощью Метод введения новых переменных.
4. Расскажите алгоритм решения системы линейных уравнений с помощью графического метода.

.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Критерии оценивания выполненных заданий

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по учебной дисциплине

Критерии оценки:

Оценка 5 ставится, если учащийся самостоятельно выполняет работу в полном объеме, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов.

Оценка 4 ставится, если выполнены требования к оценке 5, но были допущены две-три ошибки.

Оценка 3 ставится, если в ответе имеются пробелы, не препятствующие дальнейшему усвоению материала. Работа выполнена не полностью.

Оценка 2 ставится, если студент не овладел основными знаниями в соответствии с требованиями программы и допустил много ошибок. Работа выполнена не полностью и объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.

Оценка 1 ставится, если учащимся совсем не выполнил работу.

Информационное обеспечение выполнения практических занятий

Список рекомендуемой литературы:
Основные источники

Для преподавателей

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018 .
3. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2018.
4. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). – М., 2018.
5. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). – М., 2018.
6. Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2019.
7. Погорелов А. В. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2018.
8. Смирнова И.М. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2019.

Для обучающихся

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник – М. «Академия», 2019
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. – М. «Академия», 2018

Дополнительные источники

Для преподавателей

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10—11 кл. 2017.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10-11. – М., 2018.
3. Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2018.
4. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2019.
5. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2017.
6. Шарыгин И.Ф. Геометрия (базовый уровень) 10—11 кл. – 2018.

Для обучающихся

1. Григорьев С.Г., Задулина С.В. Математика. Учебник - М., «Академия», 2017
2. Гусев В.А., Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. Учебник - М., «Академия», 2018
3. Пехлецкий И.Д. Математика. Учебник - М., «Академия», 2018

Интернет-ресурсы

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов