Министерство образования Московской области
Государственное автономное профессиональное образовательное учреждение
Московской области
« Губернский колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для обучающихся

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

ДИСЦИПЛИНА

ЕН.01 Математика

специальность 54.02.01 Дизайн (по отраслям)

форма обучения: очная

Серпухов, 2021 г.

Рассмотрено на заседании
ПЦК физико-математических дисциплин
протокол № 1 от 27 августа 2021 г.
Председатель ПЦК: О.А. Михайлова

Составлено в соответствии с рабочей программой по учебному предмету «ЕН.01 Математика»

Разработчик: Моргунова И.В.

Методические рекомендации по выполнению практических занятий по учебному предмету «ЕН.01 Математика» созданы Вам в помощь для успешной работы на занятиях и подготовки к ним. Наличие положительной оценки по практическим занятиям необходимо для получения допуска к экзамену, поэтому в случае отсутствия на уроке по любой причине или получения неудовлетворительной оценки за практическое занятие, Вы должны найти время для ее выполнения или пересдачи.

Ознакомьтесь с общими рекомендациями, чтобы ваша работа была продуктивна и качественно организована.

1. Внимательно прочитайте методические рекомендации по выполнению практической работы.
2. Внимательно прочитайте пояснения, при необходимости повторите лекционный материал по конспектам и другим источникам, относящийся к теме практической работы.
3. Ответьте на контрольные вопросы, если они предложены.
4. Подготовьте все необходимое для выполнения задания, рационально подготовьте рабочее место.
5. Продумайте ход выполнения работы.
6. Если ваша работа связана с использованием ИКТ, проверьте наличие и работоспособность программного обеспечения, необходимого для выполнения задания.
7. Если при выполнении практической работы применяется групповое или коллективное выполнение задания, старайтесь поддерживать в коллективе нормальный психологический климат, грамотно распределить роли и обязанности. Вместе проводите анализ организации и промежуточные результаты практической работы микрогруппы.
8. При выполнении практического задания соблюдайте правила техники безопасности и охраны труда.
9. В процессе выполнения практической работы обращайтесь за консультациями к преподавателю, чтобы вовремя скорректировать свою деятельность, проверить правильность выполнения задания.
10. По окончании выполнения практической работы составьте письменный или устный отчет в соответствии с теми методическими указаниями по оформлению отчета, которые вы получили от преподавателя или в методических указаниях.
11. Сдайте готовую работу преподавателю для проверки.
12. Участвуйте в обсуждении и оценке полученных результатов практической работы .

Программой по учебному предмету «ЕН.01 Математика» предусматривается выполнение практических занятий, направленных на формирование следующих элементов:
компетенций:
ОК 01. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам;
ОК 02. Осуществлять поиск, анализ и интерпретацию информации, необходимой для выполнения задач профессиональной деятельности;
ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие;
ОК 04. Работать в коллективе и команде, эффективно взаимодействовать с коллегами, руководством, клиентами;
ОК 05. Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста;
ОК 06. Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, применять стандарты антикоррупционного поведения;
ОК 07. Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях;
ОК 08. Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в

процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности;
ОК 09. Использовать информационные технологии в профессиональной деятельности;
ОК 10. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках;
ОК 11. Использовать знания по финансовой грамотности, планировать предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере.
ПК 1.3. Осуществлять процесс дизайнерского проектирования с применением специализированных компьютерных программ.
ПК 1.4. Производить расчеты технико-экономического обоснования предлагаемого проекта.
ПК 4.1. Планировать работу коллектива.
ПК 4.2. Составлять конкретные технические задания для реализации дизайн-проекта на основе технологических карт.

Умений:
умение 1 - применять математические методы для решения профессиональных задач;
умение 2 - использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.
Знаний:
знание 1 - основные понятия и методы математического синтеза и анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики

ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Тема лабораторных/практических занятий	**Количество часов на выполнение ЛПЗ**	**Формируемые У, З**	**Формируемые ОК, ПК**
Практическое занятие № 1. Изображение комплексных чисел на плоскости	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 2. Операции над многочленами	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 3. Разложение многочлена на множители	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 4. Решение системы линейных уравнений	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 5. Составление таблиц истинности	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 6. Применение таблицы истинности для доказательства истинности высказываний	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 7. Определение равносильности высказываний	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 8. Операции над множествами	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 9. Изображение множеств и операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 10. Решение задач с помощью комбинаторных конструкций	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 11. Вычисление вероятности события	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 12. Решение транспортных задач с использованием графов	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4
Практическое занятие № 13. Применение графов для решения задач	1	У.1-2; З.1	ОК.01; ОК.11 ПК.1.3;1.4

Содержание практических занятий

Раздел 1. Развитие понятия о числе

Тема 1.1. Комплексные числа

Практическое занятие №1. Изображение комплексных чисел на плоскости
количество часов 1

Цель: формировать умение графического изображения комплексных чисел, выполнения арифметических операций с комплексными числами

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Каждому комплексному числу $z = a+ib$ можно поставить в соответствие упорядоченную пару действительных чисел $(a; b)$ и наоборот. Такая упорядоченная пара действительных чисел определяет точку или вектор на плоскости.
Следовательно, комплексное число вида $z = a+ib$ изображается на координатной плоскости точкой $M(a, b)$ или вектором, начало которого совпадает с началом координат, а конец с т. М.
Сама координата плоскости называется при этом комплексной плоскости, ось абсцисс — действительной осью, ось ординат — мнимой осью.

Например, изобразим числа
$z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = -3 + i,\ z_3 = -4 - 4i,\ z_4 = 3i,\ z_5 = 3 - 2i, z_6 = 6$ (рис. 1).

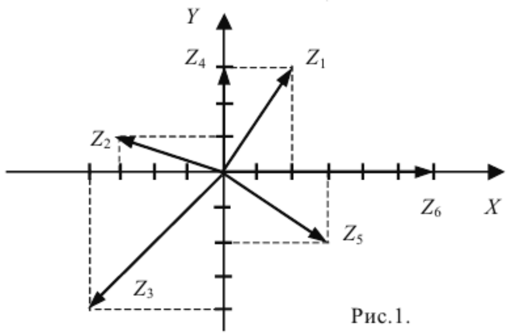


Рис.1.

Представление комплексного числа как вектора на плоскости позволяет ввести понятие модуля и аргумента комплексного числа.
Модулем комплексного числа называют длину вектора, которая соответствует данному числу (обозначают r либо р).
Аргументом комплексного числа $(z \neq 0)$ называют величину угла φ между положительным направлением действительной оси и вектора, который соответствует данному комплексному числу.
Рассмотрим рисунок:

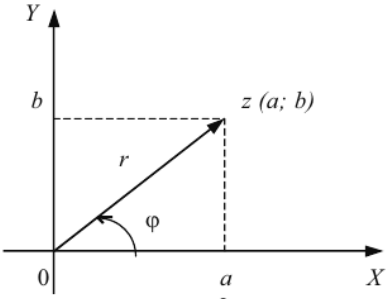


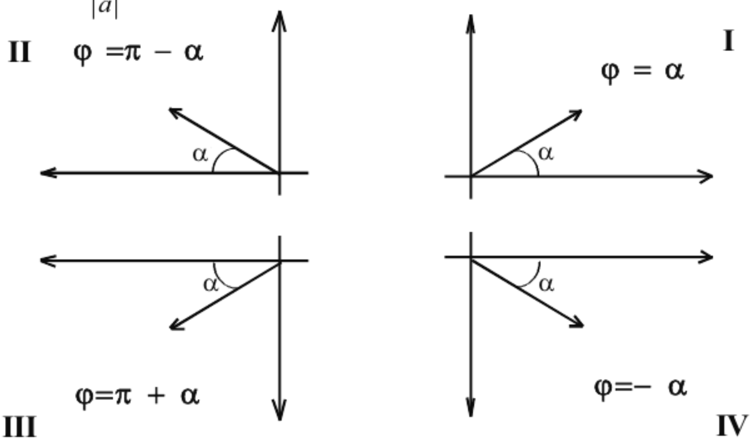
рис. 2

На основе теоремы Пифагора получаем $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.
Например, комплексное число $z=8-6i$ имеет модуль равный 10, так как
$r = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$.
Аргумент комплексного числа $z \neq 0$, в отличии от модуля, вычисляется неоднозначно. Так аргументом числа 5 являются следующие
углы $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = 2\pi$; $\varphi_3 = -2\pi, \ldots \varphi_k = 2\pi k\ (k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots)$. Среди бесконечного множества значений аргумента только одно принадлежит промежутку $(-\pi; \pi)$ или $(0; 2\pi)$. Эти значения аргумента мы и будем вычислять.
Аргумент легко вычислить, если комплексное число расположено в I четверти. Действительно, согласно тригонометрическим соотношениям в прямоугольном треугольнике (рис. 2) имеем:
$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}, \quad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$.
Если комплексные числа размещены в других четвертях, то необходимо провести дополнительные рассуждения. Рассмотрим рис. 3. Видим, что для

II четверти $\varphi = p - \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$; для III четверти $\varphi = p + \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$;

для IV чверті $\varphi = -\mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$, либо $\varphi = 2p - \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$,

если за $\mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$ принимать значение острого угла α.



Таким образом, алгоритм нахождения аргумента комплексного числа следующий:
1.Определить коэффициент a, b заданного комплексного числа.
2. Найти $\alpha = \mathrm{arctg}\left|\frac{b}{a}\right|$.
3. Установить, в какой четверти расположено комплексное число.
4. Вычислить аргумент φ согласно приведённым формулам.
Возможны и другие способы нахождения аргумента комплексного числа, например:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{acrtg}\dfrac{b}{a}, & \textit{если точка } (a;b) \textit{ принадлежит I либо IV четверти;} \\ \pi - \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \textit{если точка } (a;b) \textit{ принадлежит II либо III четверти;} \end{cases}$$

либо аргумент j определяют по системе $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r}; \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r}. \end{cases}$

Пример 4. Найти аргумент комплексного числа $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Решение:

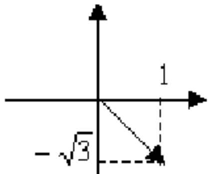


рис.4

1. Вычислить коэффициенты a=1, $b = -\sqrt{3}$.
2. Найти острый угол $\alpha = \operatorname{arctg}\left|\dfrac{-\sqrt{3}}{1}\right| = 60^0$.
3. Выяснить, в какой четверти находится данное число (рис. 4).
4. Аргумент, который соответствует данному комплексному числу принадлежит IV четверти, то есть $\varphi = -\alpha = -60^0$.

Ответ: $\varphi = -60^o = -\dfrac{\pi}{3}$.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим рис. 2. Согласно тригонометрическим соотношениям в прямоугольном треугольнике числа a,b можно выразить через r и φ таким образом:

$a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$.

Тогда комплексное число запишется в виде:

$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Запись комплексного числа в таком виде называется **тригонометрической формой комплексного числа.**

Следовательно, для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + ib$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и аргумент.

Пример 5. Записать число $z = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Решение:

Найдём модуль $r = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$

Найдём острый угол $\alpha = \operatorname{arctg}\left|\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}.$

Вектор, который соответствует данному комплексному числу принадлежит третьей четверти, поэтому аргумент равен $\varphi = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$, следовательно $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Ответ: $z = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Для того, чтобы перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ к алгебраической, достаточно найти действительные числа a, b из формул $a = r\cos\varphi$; $b = r\sin\varphi$.

Пример 6. Записать число $z = 2(\cos 330^0 + i\sin 330^0)$ в алгебраической форме.

Найдём $\sin 330^0$ и $\cos 330^0$

$$\cos 330^0 = \cos(360^0 - 30^0) = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 330^0 = \sin(360^0 - 30^0) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2};$$

тогда $a = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}; \quad b = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$

Следовательно $z = 2\left(\cos 330^0 + i\sin 330^0\right) = \sqrt{3} - i$.

Ответ: $z = \sqrt{3} - i$.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

В тригонометрической форме записи комплексного числа выполняют действия умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня n-й степени. Выведение формул, по которым выполняются действия, относительно просты и основываются на основных формулах тригонометрии.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

Тогда
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Следовательно, при умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножают, а аргументы складывают; при делении — модули делят, а аргументы вычитают.

Правило умножения комплексных чисел автоматически распространяется на произвольное число множителей. Если взять равные множители $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Полученную формулу называют **формулой Муавра.**

Для извлечении корня n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используют формулу:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ арифметический корень, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Пример 7. Даны комплексные числа $z_1 = 12(\cos 225^0 + i\sin 225^0)$ и $z_2 = \frac{3}{2}(\cos 75^0 + i\sin 75^0)$

Найти произведения $z_1 \cdot z_2$ и частное $\frac{z_1}{z_2}$. Результат записать в алгебраической форме.

Решение: Используя правила умножения и деления комплексных чисел в тригонометрической форме, получим:

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \frac{3}{2}(\cos(225^0 + 75^0) + i\sin(225^0 + 75^0)) =$$

$$= 18(\cos 300^0 + i\sin 300^0) = 18\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 - 9i\sqrt{3};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 12 : \frac{3}{2}(\cos(225^0 - 75^0) + i\sin(225^0 - 75^0)) =$$

$$= 8(\cos 150^0 + i\sin 150^0) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} + 4i.$$

Ответ: $z_1 \cdot z_2 = 9 - i9\sqrt{3}$; $\frac{z_1}{z_2} = -4\sqrt{3} + 4i$.

Пример 8. Вычислить $z = (2(\cos 24^0 + i\sin 24^0))^5$. Ответ записать в алгебраической форме.

Решение: Находим:

$$z=2^5(\cos(5\cdot 24^0)+i\sin(5\cdot 24^0))=32(\cos 120^0+i\sin 120^0)=$$

$$=32\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-16+16i\sqrt{3}.$$

<u>Ответ:</u> $z=-16+i16\sqrt{3}$.

<u>Пример 9.</u> Вычислить $\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}$.

<u>Решение:</u> Запишем число $\sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме:

Тогда

$$\sqrt{3}-i=2(\cos 330^0+i\sin 330^0),$$

$$\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}=(2(\cos 330^0+i\sin 330^0))^{10}=$$

$$=2^{10}\cdot(\cos 10\cdot 330^0+i\sin 10\cdot 330^0)=2^{10}\cdot(\cos(60^0+9\cdot 360^0)+i\sin(60^0+9\cdot 360^0))=$$

$$=2^{10}\cdot(\cos 60^0+i\sin 60^0)=1024\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=512+512i\sqrt{3}\ .$$

<u>Ответ</u>: $\left(\sqrt{3}-i\right)^{10}=512+i\cdot 512\sqrt{3}$.

<u>Пример 10.</u> Вычислите $\sqrt[4]{-81}$ . . Ответ запишите в алгебраической и тригонометрической формах.

<u>Решение:</u> Запишем число -81 в тригонометрической форме:

$-81=81(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Тогда:

$$\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), \text{где } k=0,1,2,3\ .$$

При $k=0$:

$$z_0=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi\cdot 0}{2}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

При $k=1$:

$$z_1=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

При $k=2$:

$$z_2=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right)=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

При $k=3$:

$$z_3=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

Задания для практического занятия:

1 вариант	**2 вариант**
№ 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:	
z_1= 4i	z_1= -5i
z_2 = 3 + i	z_2= 4 + i

z_3= - 4 +3i	z_3 = -7 + 2i
z_4= - 2 -5i	z $_4$= -3 – 6i
№ 2. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:	
А) (3 + 5*i*) + (7 – 2*i*). б) (6 + 2*i*) + (5 + 3*i*). в) (– 2 + 3*i*) - (7 – 2*i*). г) (5 – 4*i*) - (6 + 2*i*).	(3 – 2*i*) + (5 + *i*). (4 + 2*i*) + (– 3 + 2*i*). (– 5 + 2*i*) - (5 + 2*i*). (– 3 – 5*i*) - (7 – 2*i*).

Контрольные вопросы

1) Что называют комплексным числом?
2) В каком случае выражения $a+bi$ и $c+di$ считаются равными?
3) При каком условии комплексное число $a+bi$ отождествляется с действительным числом *а?*
4) Какое комплексное число называют мнимым числом?
5) Какое комплексное число называют мнимой единицей?
6) Что называют действительной частью, мнимой частью числа z=$a+bi$.
7) Как обозначают действительную часть, мнимую часть числа z=$a+bi$?
8) Что называют суммой комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$?
9) Что называют разностью комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$?
10) В чем состоит геометрическое изображение комплексных чисел?
11) Какому геометрическому преобразованию плоскости соответствует сумма двух комплексных чисел?
12) Как расположены точки комплексной плоскости, соответствующие числам a+bi и a-bi?
13) Как расположены на комплексной плоскости точки, соответствующие противоположным числам z и -z?
14) Во что переходит круг единичного радиуса с центром в начале координат при преобразовании $z \to z-2+3i$?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018 .

Тема 1.2. Многочлены

Практическое занятие №2. Операции над многочленами
количество часов 1

Цель: научиться выполнять действия над многочленами

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Многочлен — это сумма одночленов.

Например, выражение $2x + 4xy^2 + x + 2xy^2$ является многочленом. Проще говоря, многочлен это несколько одночленов, соединенных знаком «плюс».
В некоторых многочленах одночлены могут соединяться знаком «минус».
Например, $3x - 5y - 2x$. Следует иметь ввиду, что это по-прежнему **сумма** одночленов.
Многочлен $3x - 5y - 2x$ это сумма одночленов $3x$, $-5y$ и $- 2x$, то есть $3x + (-5y) + (-2x)$.
После раскрытия скобок образуется многочлен $3x - 5y - 2x$.

$$3x + (-5y) + (-2x) = 3x - 5y - 2x$$

Соответственно, рассматривая по отдельности каждый одночлен многочлена, его нужно рассматривать вместе со знаком, который перед ним располагается. Так, в многочлене $3x - 5y - 2x$ минус перед одночленом $5y$ относится к коэффициенту 5, а минус перед одночленом $2x$ относится к коэффициенту 2. Чтобы не противоречить определению многочлена, вычитание можно заменять сложением:

$$3x - 5y - 2x = 3x + (-5y) + (-2x)$$

Но это действие нагромождает многочлен скобками, поэтому вычитание на сложение не заменяют, учитывая в будущем, что каждый одночлен многочлена будет рассматриваться вместе со знаком, который перед ним располагается.
Одночлены, из которых состоит многочлен, называют **членами многочлена**.
Если многочлен состоит из двух членов, то такой многочлен называют **двучленом**. Например, многочлен $x + y$ является двучленом.
Если многочлен состоит из трёх членов, то такой многочлен называют **трехчленом**. Например, многочлен $x + y + z$ является трехчленом.
Если какой-нибудь многочлен содержит обычное число, то это число называют **свободным членом многочлена**. Например, в многочлене $3x + 5y + z + 7$ член 7 является свободным членом. Свободный член многочлена не содержит буквенной части.
Многочленом также является любое числовое выражение. Так, следующие выражения являются многочленами:

$$2 + 3$$
$$5 + 3 + 2$$
$$5 - 4 + 9$$

Сложение многочленов

К многочлену можно прибавить другой многочлен. Например, прибавим к многочлену $2x + y$ многочлен $3x + y$.
Заключим в скобки каждый многочлен и соединим их знаком «плюс», указывая тем самым, что мы складываем многочлены:

$$(2x + y) + (3x + y)$$

Теперь раскрываем скобки:

$$2x + y + 3x + y$$

Далее приведём подобные слагаемые:

$$2x + y + 3x + y = 5x + 2y$$

Таким образом, при сложении многочленов $2x + y$ и $3x + y$ получается многочлен $5x + 2y$.
Разрешается также сложение многочленов в столбик. Для этого их следует записать так, чтобы подобные слагаемые располагались друг под другом, затем выполнить самó сложение. Решим предыдущий пример в столбик:

$$+\begin{array}{l} 2x + y \\ 3x + y \\ \hline 5x + 2y \end{array}$$

Если в одном из многочленов окажется слагаемое, которое не имеет подобного слагаемого в другом многочлене, оно переносится к результату без изменений. Как говорят при сложении обычных чисел — «сносится».
Например, сложим в столбик многочлены $2x^2 + y^3 + z + 2$ и $5x^2 + 2y^3$. Для начала запишем их так, чтобы подобные слагаемые располагались друг под другом, затем выполним их сложение.

Обнаруживаем, что во втором многочлене не содержатся слагаемые, которые можно было бы сложить со слагаемыми z и 2 из первого многочлена. Поэтому слагаемые z и 2 переносятся к результату без изменений (вместе со своими знаками)

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l} 2x^2 + y^3 + z + 2 \\ 5x^2 + 2y^3 \end{array} \\
\hline
7x^2 + 3y^3 + z + 2
\end{array}
$$

Решим этот же пример с помощью скобок:

$$(2x^2 + y^3 + z + 2) + (5x^2 + 2y^3) = 2x^2 + y^3 + z + 2 + 5x^2 + 2y^3 = (2x^2 + 5x^2) + (y^3 + 2y^3) + z + 2 = 7x^2 + 3y^3 + z + 2$$

Пример 3. Сложить многочлены $7x^3 + y + z^2$ и $x^3 - z^2$

Решим этот пример в столбик. Запишем второй многочлен под первым так, чтобы подобные слагаемые располагались друг под другом:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{l} 7x^3 + y + z^2 \\ x^3 \qquad\; - z^2 \end{array} \\
\hline
8x^3 + y
\end{array}
$$

Во втором многочлене не было слагаемого, которого можно было бы сложить со слагаемым y из первого многочлена, поэтому это слагаемое было перенесёно к результату без изменений. А сложение подобных слагаемых z^2 и $-z^2$ дало в результате 0. Ноль по традиции не записываем. Поэтому окончательный ответ это $8x^3 + y$.

Решим этот же пример с помощью скобок:

$$(7x^3 + y + z^2) + (x^3 - z^2) = 7x^3 + y + z^2 + x^3 - z^2 = (7x^3 + x^3) + (z^2 - z^2) + y = 8x^3 + y$$

Вычитание многочленов

Из многочлена можно вычесть другой многочлен. Например, вычтем из многочлена $2x + y$ многочлен $3x + y$.

Заключим в скобки каждый многочлен и соединим их знаком «минус», указывая тем самым, что мы выполняем вычитание:

$$(2x + y) - (3x + y)$$

Теперь раскроем скобки:

$$2x + y - 3x - y$$

Приведём подобные слагаемые. Слагаемые y и $-y$ являются противоположными. Сумма противоположных слагаемых равна нулю

$$y + (-y) = 0$$

Приводя подобные слагаемые, мы обычно складываем их. Но в качестве знака операции можно использовать знак одночлена. Так, приводя подобные слагаемые y и $-y$ мы сложили их по правилу приведения подобных слагаемых. Но можно не складывая, записать их друг за другом

$$y - y$$

Получится тот же результат, поскольку выражения $y + (-y)$ и $y - y$ одинаково равны нулю:

$$y - y = 0$$

Возвращаемся к нашему примеру. Вычеркнем члены y и $-y$:

$$2x \cancel{+ y} - 3x \cancel{- y}$$

А сложение подобных слагаемых $2x$ и $-3x$, даст в результате $-x$

$$2x + (-3x) = -x$$

Или без сложения, записав члены друг за другом:

$$2x - 3x = -x$$

Значит, при вычитании из многочлена $(2x + y)$ многочлена $(3x + y)$ получится одночлен $-x$.

Решим этот же пример в столбик:

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} 2x + y \\ 3x + y \end{array} \\
\hline
-x
\end{array}
$$

Пример 2. Вычесть из многочлена $13x - 11y + 10z$ многочлен $-15x + 10y - 15z$
Решим этот пример с помощью скобок, а затем в столбик:

$$(13x - 11y + 10z) - (-15x + 10y - 15z) = 13x - 11y + 10z + 15x - 10y + 15z = (13x + 15x) + (-11y - 10y) + (10z + 15z) = 28x + (-21y) + 25z = 28x - 21y + 25z$$

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 13x - 11y + 10z \\ -15x + 10y - 15z \end{array} \\ \hline 28x - 21y + 25z \end{array}$$

Следует быть внимательным при вычитании в столбик. Если не следить за знаками, вероятность допустить ошибку очень высока́. Нужно учитывать не только знак операции вычитания, но и знак располагающийся перед слагаемым.
Так, в данном примере из слагаемого $10z$ вычиталось слагаемое $-15z$

$$10z - (-15z)$$

Результат вычисления этого выражения должен быть положительным,
поскольку $10z - (-15z) = 10z + 15z$.
Складывая или вычитая многочлены при помощи скобок, первый многочлен в скобки можно не заключать. Так, в данном примере из многочлена $13x - 11y + 10z$ требовалось вычесть многочлен $-15x + 10y - 15z$
Вычитание было записано так:

$$(13x - 11y + 10z) - (-15x + 10y - 15z)$$

Но первый многочлен можно не заключать в скобки:

$$13x - 11y + 10z - (-15x + 10y - 15z)$$

Заключение первого многочлена в скобки на первых порах позволяет начинающим наглядно увидеть, что второй многочлен полностью вычитается из первого, а не из определенной его части.

Представление многочлена в виде суммы или разности

Многочлен можно представить в виде суммы или разности многочленов. По сути это обратное действие раскрытию скобок, поскольку идея подразумевает, что имеется некий многочлен, и из него можно образовать сумму или разность многочленов, заключив в скобки некоторые из членов исходного многочлена.
Пусть имеется многочлен $3x + 5y + z + 7$. Представим его в виде суммы двух многочленов.
Итак, из членов исходного многочлена нужно образовать два многочлена, сложенные между собой. Давайте заключим в скобки члены $3x$ и $5y$, а также члены z и 7. Далее объединим их с помощью знака «плюс»

$$(3x + 5y) + (z + 7)$$

Значение исходного многочлена при этом не меняется. Если раскрыть скобки в получившемся выражении $(3x + 5y) + (z + 7)$, то снова получим многочлен $3x + 5y + z + 7$.

$$(3x + 5y) + (z + 7) = 3x + 5y + z + 7$$

В скобки также можно было бы заключить члены $3x$, $5y$, z и прибавить это выражение в скобках к члену 7

$$(3x + 5y + z) + 7$$

Представляя многочлен в виде разности многочленов, нужно придерживаться следующего правила. Если члены заключаются в скобки после знака минуса, то этим членам внутри скобок нужно поменять знаки на противоположные.
Вернемся к многочлену $3x + 5y + z + 7$. Представим его в виде разности двух многочленов.
Давайте заключим в скобки многочлен $3x$ и $5y$, а также z и 7, затем объединим их знаком «минус»

$$(3x + 5y) - (z + 7)$$

Но мы видим, что после знака минуса следует заключение членов z и 7 в скобки. Поэтому этим членам нужно поменять знаки на противоположные. Делать это нужно внутри скобок:

$$(3x + 5y) - (-z - 7)$$

Заключая члены в скобки, нужно следить за тем, чтобы значение нового выражения тождественно было равно предыдущему выражению. Этим и объясняется замена знаков членов внутри скобок. Если в выражении $(3x + 5y) - (-z - 7)$ раскрыть скобки, то получим изначальный многочлен $3x + 5y + z + 7$.

$$(3x + 5y) - (-z - 7) = 3x + 5y + z + 7$$

Вообще, представляя многочлен в виде суммы или разности, можно придерживаться следующих правил:

Если перед скобками ставится знак «плюс», то все члены внутри скобок записываются со своими же знаками.

Если перед скобками ставится знак «минус», то все члены внутри скобок записываются с противоположными знаками.

Пример 1. Представить многочлен $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4$ в виде суммы каких-нибудь двучленов:

$$(3x^4 + 2x^3) + (5x^2 - 4)$$

Пример 2. Представить многочлен $3x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4$ в виде разности каких-нибудь двучленов:

$$(3x^4 + 2x^3) - (-5x^2 + 4)$$

Перед вторыми скобками располагался минус, поэтому члены $5x^2$ и -4 были записаны с противоположными знаками.

Многочлен и его стандартный вид

Многочлен, как и одночлен, можно привести к стандартному виду. В результате получается упрощенный многочлен, с которым удобно работать.

Чтобы привести многочлен к стандартному виду, нужно привести подобные слагаемые в этом многочлене. Подобные слагаемые в многочлене называют **подобными членами многочлена**, а приведение подобных слагаемых в многочлене — **приведением его подобных членов**.

Подобные члены многочлена это члены, имеющие одинаковую буквенную часть.

Приведём многочлен $2x + 4xy^2 + x - xy^2$ к стандартному виду. Для этого приведём его подобные члены. Подобными членами в этом многочлене являются $2x$ и x, а также $4xy^2$ и $-xy^2$.

$$\underline{2x} + \underline{4xy^2} + \underline{x} - \underline{xy^2} = 3x + 3xy^2$$

В результате получили многочлен $3x + 3xy^2$, который не имеет подобных членов. Такой вид многочлена называют **многочленом стандартного вида**.

Как и у одночлена, у многочлена имеется степень. Чтобы определить степень многочлена, сначала его нужно привести к стандартному виду, затем выбрать тот одночлен, степень которого является наибольшей из всех.

В предыдущем примере мы привели многочлен $2x + 4xy^2 + x - xy^2$ к стандартному виду. В результате получили многочлен $3x + 3xy^2$. Он состоит из двух одночленов. Степенью первого одночлена является 1, а степенью второго одночлена является 3. Наибольшая из этих степеней является 3. Значит, многочлен $3x + 3xy^2$ является многочленом третьей степени.

А поскольку многочлен $3x + 3xy^2$ тождественно равен предыдущему многочлену $2x + 4xy^2 + x - xy^2$, то и этот предыдущий многочлен является многочленом третьей степени.

Степенью многочлена стандартного вида называют наибольшую из степеней, входящих в него одночленов.

В некоторых многочленах прежде всего требуется привести к стандартному виду одночлены, входящие в него, и только потом приводить сам многочлен к стандартному виду.

Например, приведем многочлен $3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x$ к стандартному виду. Этот многочлен состоит из одночленов, которые не приведены к стандартному виду. Сначала приведём их к стандартному виду:

$$3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x = 3x^5 + 3x^4 - 5x^5 - 5x^3$$

Теперь получившийся многочлен $3x^5 + 3x^4 - 5x^5 - 5x^3$ можно привести к стандартному виду. Для этого приведем его подобные члены. Подобными являются члены $3x^5$ и $-5x^5$. Больше подобных членов нет. Члены $3x^4$ и $-5x^3$ будут переписаны без изменений:

$$3xx^4 + 3xx^3 - 5x^2x^3 - 5x^2x = 3x^5 + 3x^4 - 5x^5 - 5x^3 = -2x^5 + 3x^4 - 5x^3$$

Пример 2. Привести многочлен $3ab + 4cc + ab + 3c^2$ к стандартному виду.
Сначала приведем одночлен $4cc$, входящий в исходный многочлен, к стандартному виду, получим $4c^2$

$$3ab + 4cc + ab + 3c^2 = 3ab + 4c^2 + ab + 3c^2$$

Далее приведём подобные члены:

$$3ab + 4cc + ab + 3c^2 = 3ab + 4c^2 + ab + 3c^2 = 4ab + 7c^2$$

Пример 3. Привести многочлен $4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y$ к стандартному виду.
Подобными членами в данном многочлене являются $4x^2$ и $-x^2$, а также $-4y$, $17y$ и $-y$. Приведем их:

$$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = 3x^2 + 12y$$

Приводя подобные члены, можно использовать скобки. Для этого подобные члены следует заключить в скобки, затем объединить выражения в скобках с помощью знака «плюс».
Решим предыдущий пример с помощью скобок. Подобными членами в нём были $4x^2$ и $-x^2$, а также $-4y$, $17y$ и $-y$. Заключим их в скобки и объединим с помощью знака «плюс»

$$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = (4x^2 - x^2) + (-4y + 17y - y)$$

Теперь в скобках выполним приведение подобных членов:

$$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = (4x^2 - x^2) + (-4y + 17y - y) = (3x^2) + (12y)$$

В получившемся выражении $(3x^2) + (12y)$ раскроем скобки:

$$4x^2 - 4y - x^2 + 17y - y = (4x^2 - x^2) + (-4y + 17y - y) = (3x^2) + (12y) = 3x^2 + 12y$$

Конечно, такой подход нагромождает выражение, но зато позволяет свести к минимуму допущение ошибок.

Пример 4. Привести многочлен $12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y$ к стандартному виду.
Заключим в скобки подобные слагаемые и объединим их с помощью знака «плюс»

$$12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y = (12x^2 - 9x^2) + (-9y + 6y + y)$$

Далее вычисляем содержимое скобок:

$$12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y = (12x^2 - 9x^2) + (-9y + 6y + y) = (3x^2) + (-2y)$$

Избавляемся от скобок при помощи раскрытия:

$$12x^2 - 9y - 9x^2 + 6y + y = (12x^2 - 9x^2) + (-9y + 6y + y) = (3x^2) + (-2y) = 3x^2 - 2y$$

Изменение порядка следования членов

Рассмотрим двучлен $x - y$. Как сделать так, чтобы член $-y$ располагался первым, а член x вторым?
Многочлен это сумма одночленов. То есть исходный двучлен двучлен $x - y$ является суммой x и $-y$

$$x + (-y)$$

От перестановки мест слагаемых сумма не меняется. Тогда x и $-y$ можно поменять местами

$$-y + x$$

Пример 2. В двучлене $-y - x$ поменять местами члены.
Двучлен $-y - x$ это сумма членов $-y$ и $-x$

$$-y + (-x)$$

Тогда согласно переместительному закону сложения получим $(-x) + (-y)$. Избавим выражение от скобок:

$$-x - y$$

Таким образом, решение можно записать покороче:

$$-y - x = -x - y$$

Пример 3. Упорядочить члены многочлена $x + xy^3 - x^2$ в порядке убывания степеней.
Наибольшую степень в данном многочлене имеет член xy^3, далее $-x^2$, а затем x. Запишем их в этом порядке:

$$x + xy^3 - x^2 = xy^3 - x^2 + x$$

Умножение одночлена на многочлен

Одночлен можно умножить на многочлен. Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно этот одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Например, умножим одночлен $3x^2$ на многочлен $2x + y + 5$. При умножении одночлена на многочлен, последний нужно заключать в скобки:

$$3x^2(2x + y + 5)$$

Теперь умножим одночлен $3x^2$ на каждый член многочлена $2x + y + 5$. Получающиеся произведения будем складывать:

$$3x^2(2x + y + 5) = 3x^2 \times 2x + 3x^2 \times y + 3x^2 \times 5$$

Вычислим получившиеся произведения:

$$3x^2(2x + y + 5) = 3x^2 \times 2x + 3x^2 \times y + 3x^2 \times 5 = 6x^3 + 3x^2y + 15x^2$$

Таким образом, при умножении одночлена $3x^2$ на многочлен $2x + y + 5$ получается многочлен $6x^3 + 3x^2y + 15x^2$.

Умножение желательно выполнять в уме. Так решение получается короче:

$$3x^2(2x + y + 5) = 6x^3 + 3x^2y + 15x^2$$

В некоторых примерах одночлен располагается после многочлена. В этом случае опять же каждый член многочлена нужно перемножить с одночленом и полученные произведения сложить.

Например, предыдущий пример мог быть дан в следующем виде:

$$(2x + y + 5) \times 3x^2$$

В этом случае мы умножили бы каждый член многочлен $(2x + y + 5)$ на одночлен $3x^2$ и сложили бы полученные результаты:

$$(2x + y + 5) \times 3x^2 = 2x \times 3x^2 + y \times 3x^2 + 5 \times 3x^2 = 6x^3 + 3x^2y + 15x^2$$

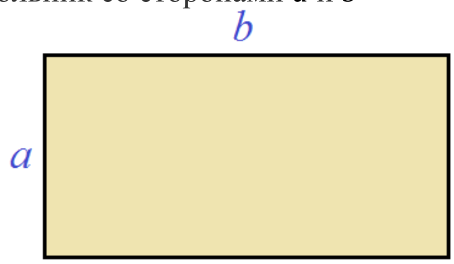
Умножение одночлена на многочлен (или умножение многочлена на одночлен) основано на распределительном законе умножения.

$$a(b + c) = ab + ac$$

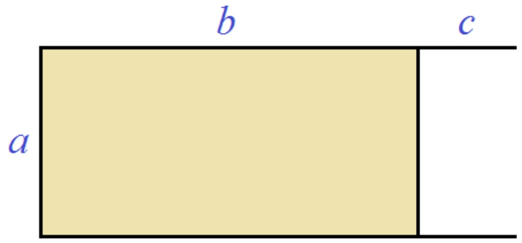
То есть чтобы умножить число a на сумму $b + c$, нужно число a умножить на каждое слагаемое суммы $b + c$, и полученные произведения сложить.

Вообще, умножение одночлена на многочлен, да и распределительный закон умножения имеют геометрический смысл.

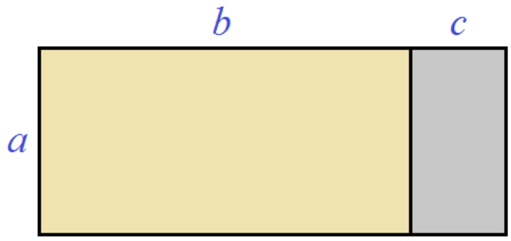
Допустим, имеется прямоугольник со сторонами a и b



Увеличим сторону b на c



Достроим отсутствующую сторону и закрасим для наглядности получившийся прямоугольник:



Теперь вычислим площадь получившегося большого прямоугольника. Он включает в себя желтый и серый прямоугольники.
Чтобы вычислить площадь получившегося большого прямоугольника, можно по отдельности вычислить площади желтого и серого прямоугольников и сложить полученные результаты.
Площадь желтого прямоугольника будет равна ab, а площадь серого ac

$$ab + ac$$

А это всё равно что длину большого прямоугольника умножить на его ширину. Длина в данном случае это $b + c$, а ширина это a

$$(b + c) \times a$$

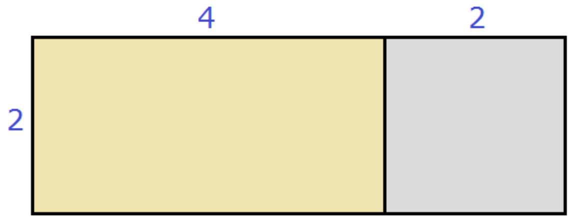
или ширину умножить на длину, чтобы расположить буквы a, b и c в алфавитном порядке:

$$a \times (b + c)$$

Таким образом, выражения $a \times (b + c)$ и $ab + ac$ равны одному и тому же значению (одной и той же площади)

$$a \times (b + c) = ab + ac$$

К примеру, пусть у нас имеется прямоугольник длиной 4 см, и шириной 2 см, и мы увеличили длину на 2 см



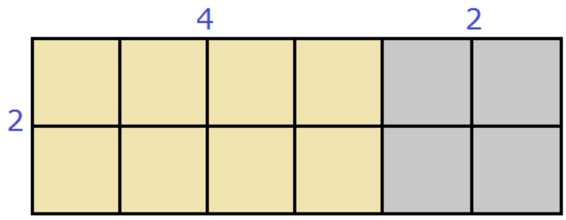
Тогда площадь данного прямоугольника будет равна 2 × (4 + 2) или сумме площадей желтого и серого прямоугольников: 2 × 4 + 2 × 2. Выражения 2 × (4 + 2) и 2 × 4 + 2 × 2 равны одному и тому же значению 12

$$2 \times (4 + 2) = 12$$
$$2 \times 4 + 2 \times 2 = 12$$

Поэтому,

$$2 \times (4 + 2) = 2 \times 4 + 2 \times 2 = 12.$$

Действительно, в получившемся большом прямоугольнике содержится двенадцать квадратных сантиметров:



Пример 2. Умножить одночлен $2a$ на многочлен $a^2 - 7a - 3$
Умножим одночлен $2a$ на каждый член многочлена $a^2 - 7a - 3$ и сложим полученные произведения:

$$2a(a^2 - 7a - 3) = 2a \times a^2 + 2a \times (-7a) + 2a \times (-3) = 2a^3 + (-14a^2) + (-6a) = 2a^3 - 14a^2 - 6a$$

Или покороче:

$$2a(a^2 - 7a - 3) = 2a^3 - 14a^2 - 6a$$

Пример 3. Умножить одночлен $-a^2b^2$ на многочлен $a^2b^2 - a^2 - b^2$

Умножим одночлен $-a^2b^2$ на каждый член многочлена $a^2b^2 - a^2 - b^2$ и сложим полученные произведения:

$$-a^2b^2(a^2b^2 - a^2 - b^2) = -a^2b^2 \times a^2b^2 + (-a^2b^2)\times(-a^2) + (-a^2b^2)\times(-b^2) =$$

$$= -a^4b^4 + a^4b^2 + a^2b^4$$

Или покороче:

$$-a^2b^2(a^2b^2 - a^2 - b^2) = -a^4b^4 + a^4b^2 + a^2b^4$$

Пример 4. Выполнить умножение $-1{,}4x^2y^6(5x^3y - 1{,}5xy^2 - 2y^3)$

Умножим одночлен $-1{,}4x^2y^6$ на каждый член многочлена $5x^3y - 1{,}5xy^2 - 2y^3$ и сложим полученные произведения:

$$-1{,}4x^2y^6(5x^3y - 1{,}5xy^2 - 2y^3) = -1{,}4x^2y^6 \times 5x^3y + (-1{,}4x^2y^6)\times(-1{,}5xy^2) +$$

$$+(-1{,}4x^2y^6)\times(-2y^3) = -7x^5y^7 + 2{,}1x^3y^8 + 2{,}8x^2y^9$$

Или покороче:

$$-1{,}4x^2y^6(5x^3y - 1{,}5xy^2 - 2y^3) = -7x^5y^7 + 2{,}1x^3y^8 + 2{,}8x^2y^9$$

Пример 5. Выполнить умножение $-\frac{1}{2}xy\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}y^2\right)$

Умножим одночлен $-\frac{1}{2}xy$ на каждый член многочлена $\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}y^2$ и сложим полученные произведения:

$$-\frac{1}{2}xy\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}y^2\right) = -\frac{1}{2}xy \times \frac{2}{3}x^2 + \left(-\frac{1}{2}xy\right)\times\left(-\frac{3}{4}xy\right) +$$

$$+\left(-\frac{1}{2}xy\right)\times\frac{4}{5}y^2 = -\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{3}{\cancel{6}}}x^3y + \frac{3}{8}x^2y^2 + \left(-\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{10}}}xy^3\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3y + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{2}{5}xy^3$$

Или покороче:

$$-\frac{1}{2}xy\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}y^2\right) = -\frac{1}{3}x^3y + \frac{3}{8}x^2y^2 - \frac{2}{5}xy^3$$

Выполняя короткие решения, результаты записывают сразу друг за другом вместе со знаком полученного члена. Рассмотрим поэтапно, как было выполнено короткое решение данного примера.

Сначала одночлен $-\frac{1}{2}xy$ нужно умножить на первый член многочлена $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}y^2\right)$, то есть на $\frac{2}{3}x^2$. Умножение выполняется в уме. Получается результат $-\frac{1}{3}x^3y$. В исходном выражении ставим знак равенства и записываем первый результат:

$$-\frac{1}{2}xy\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}y^2\right) = -\frac{1}{3}x^3y$$

После этого в исходном выражении никаких знаков ставить нельзя. Нужно сразу приступать к следующему умножению.

Следующим шагом будет умножение одночлена $-\frac{1}{2}xy$ на второй член многочлена $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}xy + \frac{4}{5}y^2\right)$, то есть на $-\frac{3}{4}xy$. Получается результат $\frac{3}{8}x^2y^2$. Этот результат является положительным, то есть со знаком плюс $+\frac{3}{8}x^2y^2$. В исходном выражении этот результат записывается вместе с этим плюсом сразу после члена $-\frac{1}{3}x^3y$

$$-\frac{1}{2}xy\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}xy+\frac{4}{5}y^2\right)=-\frac{1}{3}x^3y+\underline{\frac{3}{8}x^2y^2}$$

После этого в исходном выражении никаких знаков ставить нельзя. Нужно сразу приступать к следующему умножению.

Следующим шагом будет умножение одночлена $-\frac{1}{2}xy$ на третий член многочлена $\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}xy+\frac{4}{5}y^2\right)$, то есть на $\frac{4}{5}y^2$. Получается результат $-\frac{2}{5}xy^3$. Этот результат является отрицательным, то есть со знаком минус. В исходном выражении этот результат записывается вместе со своим минусом сразу после члена $+\frac{3}{8}x^2y^2$

$$-\frac{1}{2}xy\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}xy+\frac{4}{5}y^2\right)=-\frac{1}{3}x^3y+\frac{3}{8}x^2y^2\underline{-\frac{2}{5}xy^3}$$

Иногда встречаются выражения, в которых сначала нужно выполнить умножение одночлена на многочлен, затем опять на одночлен. Например:

$$2(a+b)c$$

В этом примере сначала член 2 умножается на многочлен $(a + b)$, затем результат умножается на c. Для начала выполним умножение 2 на $(a + b)$ и заключим полученный результат в скобки

$$2(a+b)c=(2a+2b)c$$

Скобки говорят о том, что результат умножения 2 на $(a + b)$ полностью умножается на c. Если бы мы не заключили скобки $2a + 2b$, то получилось бы выражение $2a + 2b \times c$, в котором на c умножается только $2b$. Это привело бы к изменению значения изначального выражения, а это недопустимо.

Итак, получили $(2a + 2b)c$. Теперь умножаем многочлен $(2a + 2b)$ на одночлен c и получаем окончательный результат:

$$2(a+b)c=(2a+2b)c=2ac+2bc$$

Умножение также можно было бы выполнить сначала умножив $(a + b)$ на c и полученный результат перемножить с членом 2

$$2(a+b)c=2(ac+bc)=2ac+2bc$$

В данном случае срабатывает <u>сочетательный закон умножения</u>, который говорит о том, что если выражение состоит из нескольких сомножителей, то произведение не будет зависеть от порядка действий:

$$a\times b\times c=(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

То есть умножение можно выполнять в любом порядке. Это не приведёт к изменению значения изначального выражения.

Умножение многочлена на многочлен

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.

Например, умножим многочлен $x + 3$ на $y + 4$

Заключим в скобки каждый многочлен и объединим их знаком умножения ×

$$(x+3)\times(y+4)$$

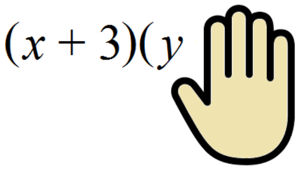
Либо запишем их друг за другом без знака ×. Это тоже будет означать умножение:

$$(x+3)(y+4)$$

Теперь умножим каждый член первого многочлена $(x + 3)$ на каждый член второго многочлена $(y + 4)$. Здесь опять же будет применяться распределительный закон умножения:

$$(a+b)c=ac+bc$$

Отличие в том, что у нас вместо переменной c имеется многочлен $(y + 4)$, состоящий из членов y и 4. Наша задача умножить $(x + 3)$ сначала на y, затем на 4. Чтобы не допустить ошибку, можно представить, что члена 4 пока не существует вовсе. Для этого его можно закрыть рукой:



Получаем привычное для нас умножение многочлена на одночлен. А именно, умножение многочлена $(x + 3)$ на одночлен y. Выполним это умножение:

$$(x + 3)(y + 4) = xy + 3y$$

Мы умножили $(x + 3)$ на y. Теперь осталось умножить $(x + 3)$ на 4. Для этого умножаем каждый член многочлена $(x + 3)$ на одночлен 4. На этот раз в исходном выражении $(x + 3)(y + 4)$ рукой закроем y, поскольку на него мы уже умножали многочлен $(x + 3)$

Получаем умножение многочлена $(x + 3)$ на одночлен 4. Выполним это умножение. Умножение необходимо продолжать в исходном примере $(x + 3)(y + 4) = xy + 3y$

$$(x + 3)(y + 4) = xy + 3y + 4x + 12$$

Таким образом, при умножении многочлена $(x + 3)$ на многочлен $(y + 4)$ получается многочлен $xy + 3y + 4x + 12$.

По другому умножение многочлена на многочлен можно выполнить ещё так: каждый член первого многочлена умножить на второй многочлен целиком и полученные произведения сложить.

Решим предыдущий пример, воспользовавшись этим способом. Умножим каждый член многочлена $x + 3$ на весь многочлен $y + 4$ целиком и сложим полученные произведения:

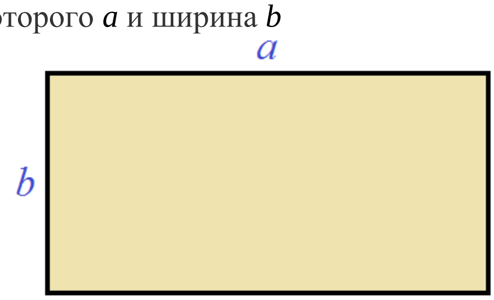
$$(x + 3)(y + 4) = x(y + 4) + 3(y + 4)$$

В результате приходим к умножению одночлена на многочлен, которое мы изучили ранее. Выполним это умножение:

$$(x + 3)(y + 4) = x(y + 4) + 3(y + 4) = xy + 4x + 3y + 12$$

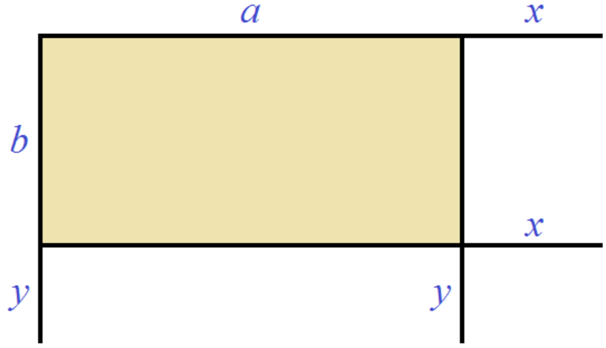
Получится тот же результат что и раньше, но члены полученного многочлена будут располагаться немного по другому.

Умножение многочлена на многочлен имеет геометрический смысл. Допустим, имеется прямоугольник, длина которого a и ширина b

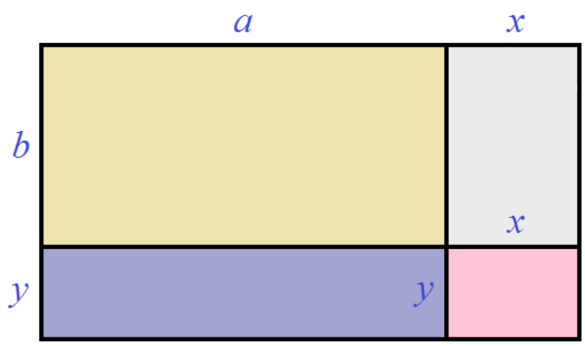


Площадь этого прямоугольника будет равна $a \times b$.

Увеличим длину данного прямоугольника на x, а ширину на y



Дострoим отсутствующие стороны и закрасим для наглядности получившиеся прямоугольники:



Теперь вычислим площадь получившегося большого прямоугольника. Для этого вычислим по отдельности площадь каждого прямоугольника, входящего в этот большой прямоугольник и сложим полученные результаты. Площадь жёлтого прямоугольника будет равна ab, площадь серого xb, площадь фиолетового ay, площадь розового xy

$$ab + xb + ay + xy$$

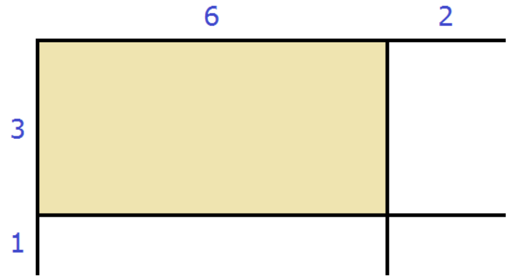
А это всё равно что умножить длину получившегося большого прямоугольника на его ширину. Длина в данном случае это $a + x$, а ширина $b + y$

$$(a + x)(b + y)$$

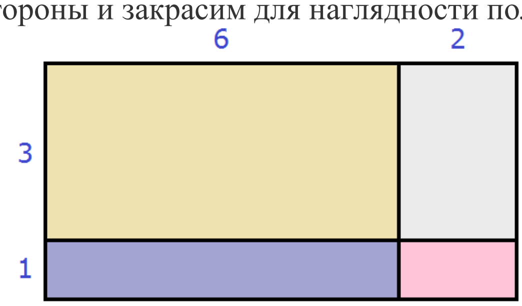
То есть выражения $(a + x)(b + y)$ и $ab + xb + ay + xy$ тождественно равны

$$(a + x)(b + y) = ab + xb + ay + xy$$

Представим, что у нас имелся прямоугольник, длиной 6 см и шириной 3 см, и мы увеличили его длину на 2 см, а ширину на 1 см



Достроим отсутствующие стороны и закрасим для наглядности получившиеся прямоугольники:



Площадь получившегося большого прямоугольника будет равна $(6 + 2)(3 + 1)$ или сумме площадей прямоугольников, входящих в большой прямоугольник: $6 \times 3 + 2 \times 3 + 6 \times 1 + 2 \times 1$. В обоих случаях получим один и тот же результат 32

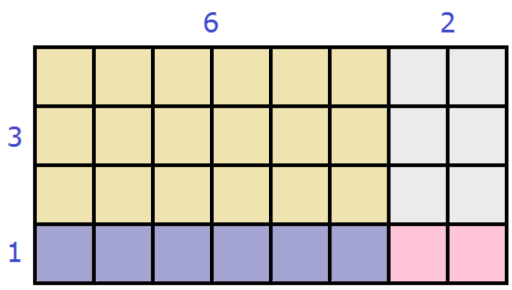
$$(6 + 2)(3 + 1) = 32$$

$$6 \times 3 + 2 \times 3 + 6 \times 1 + 2 \times 1 = 32$$

Поэтому,

$$(6 + 2)(3 + 1) = 6 \times 3 + 2 \times 3 + 6 \times 1 + 2 \times 1 = 18 + 6 + 6 + 2 = 32$$

Действительно, в получившемся большом прямоугольнике содержится тридцать два квадратных сантиметра:



Пример 2. Умножить многочлен $a + b$ на $c + d$

Заключим исходные многочлены в скобки и запишем их друг за другом:

$$(a + b)(c + d)$$

Теперь умножим каждый член первого многочлена $(a + b)$ на каждый член второго многочлена $(c + d)$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Пример 4. Выполнить умножение $(-x - 2y)(x + 2y^2)$

Умножим каждый член многочлена $(-x - 2y)$ на каждый член многочлена $(x + 2y^2)$

$$(-x - 2y)(x + 2y^2) = -x^2 - 2xy - 2xy^2 - 4y^3$$

Результат перемножения членов нужно записывать вместе со знаками этих членов. Рассмотрим поэтапно, как был решён данный пример.

Итак, требуется умножить многочлен $(-x - 2y)$ на многочлен $(x + 2y^2)$. Сначала надо умножить многочлен $(-x - 2y)$ на первый член многочлена $(x + 2y^2)$, то есть на x.

Умножаем $-x$ на x, получаем $-x^2$. В исходном выражении $(-x - 2y)(x + 2y^2)$ ставим знак равенства и записываем $-x^2$

$$(-x - 2y)(x + 2y^2) = -x^2$$

После этого в исходном выражении никаких знаков ставить нельзя. Нужно сразу приступать к следующему умножению. А именно умножению $-2y$ на x . Получится $-2xy$. Этот результат является отрицательным, то есть со знаком минус. В исходном выражении записываем результат $-2xy$ сразу после члена $-x^2$

$$(-x - 2y)(x + 2y^2) = -x^2 - 2xy$$

Теперь умножаем многочлен $(-x - 2y)$ на второй член многочлена $(x + 2y^2)$, то есть на $2y^2$

Умножаем $-x$ на $2y^2$, получаем $-2xy^2$. В исходном выражении записываем этот результат сразу после члена $-2xy$

$$(-x - 2y)(x + 2y^2) = -x^2 - 2xy - 2xy^2$$

Приступаем к следующему умножению. А именно умножению $-2y$ на $2y^2$. Получаем $-4y^3$. В исходном выражении этот результат записываем вместе со своим минусом сразу после члена $-2xy^2$

$$(-x - 2y)(x + 2y^2) = -x^2 - 2xy - 2xy^2 - 4y^3$$

Пример 5. Выполнить умножение $(4a^2 + 2ab - b^2)(2a - b)$

Умножим каждый член многочлена $(4a^2 + 2ab - b^2)$ на каждый член многочлена $(2a - b)$

$$(4a^2 + 2ab - b^2)(2a - b) = 8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - 4a^2b - 2ab^2 + b^3$$

В получившемся выражении можно привести подобные слагаемые:

$$(4a^2 + 2ab - b^2)(2a - b) = 8a^3 + \cancel{4a^2b}\,\underline{-2ab^2} - \cancel{4a^2b}\,\underline{-2ab^2} + b^3 =$$

$$= 8a^3 - 4ab^2 + b^3$$

Пример 6. Выполнить умножение $-(a + b)(c - d)$

В этот раз перед скобками располагается минус. Этот минус является коэффициентом -1. То есть исходное выражение является произведением трёх сомножителей: -1, многочлена $(a + b)$ и многочлена $(c - d)$.

$$-1(a + b)(c - d)$$

Согласно сочетательному закону умножения, если выражение состоит из нескольких сомножителей, то его можно вычислять в любом порядке.
Поэтому сначала можно перемножить многочлены $(a + b)$ и $(c - d)$ и полученный в результате многочлен умножить на -1. Перемножение многочленов $(a + b)$ и $(c - d)$ нужно выполнять в скобках

$$-1(a + b)(c - d) = -1(ac + bc - ad - bd)$$

Теперь перемножаем -1 и многочлен $(ac + bc - ad - bd)$. В результате все члены многочлена $(ac + bc - ad - bd)$ поменяют свои знаки на противоположные:

$$-1(a + b)(c - d) = -1(ac + bc - ad - bd) = -ac - bc + ad + bd$$

Либо можно было перемножить -1 с первым многочленом $(a + b)$ и результат перемножить с многочленом $(c - d)$

$$-1(a + b)(c - d) = (-a - b)(c - d) = -ac - bc + ad + bd$$

Пример 7. Выполнить умножение $x^2(x + 5)(x - 3)$
Сначала перемножим многочлены $(x + 5)$ и $(x - 3)$, затем полученный в результате многочлен перемножим с x^2

$$x^2(x+5)(x-3) = x^2(x^2+5x-3x-15) = x^4 \underline{+5x^3} \underline{-3x^3} - 15x^2 =$$
$$= x^4 + 2x^3 - 15x^2$$

Пример 8. Выполнить умножение $(a + 1)(a + 2)(a + 3)$
Сначала перемножим многочлены $(a + 1)$ и $(a + 2)$, затем полученный многочлен перемножим с многочленом $(a + 3)$
Итак, перемножим $(a + 1)$ и $(a + 2)$

$$(a+1)(a+2)(a+3) = (a^2 + a + 2a + 2)(a+3)$$

Полученный многочлен $(a^2 + a + 2a + 2)$ перемножим с $(a + 3)$

$$(a+1)(a+2)(a+3) = (a^2 + a + 2a + 2)(a+3) =$$
$$= a^3 \underline{+a^2} \underline{+2a^2} \underline{+2a} \underline{+3a^2} \underline{+3a} \underline{+6a} + 6 = a^3 + 6a^2 + 11a + 6$$

Если быстрое перемножение многочленов на первых порах даётся тяжело, можно воспользоваться подробным решением, суть которого заключается в том, чтобы записать, как каждый член первого многочлена умножается на весь второй многочлен целиком. Такая запись хоть и занимает место, но позволяет свести к минимуму допущение ошибок.
Например, выполним умножение $(a + b)(c + d)$
Запишем как каждый член многочлена $a + b$ умножается на весь многочлен $c + d$ целиком. В результате придём к умножению одночлена на многочлен, выполнять которое проще:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Такая запись удобна при умножении двучлена на какой-нибудь многочлен, в котором содержится больше двух членов. Например:

$$(x + y)(x^2 + 2xy + y^2) = x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$
$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Или при перемножении многочленов, содержащих больше двух членов. Например, умножим многочлен $x^2 + 2x - 5$ на многочлен $x^3 - x + 2$

$$(x^2 + 2x - 5)(x^3 - x + 2)$$

Запишем перемножение исходных многочленов в виде умножения каждого члена многочлена $x^2 + 2x - 5$ на многочлен $x^3 - x + 2$.

$$(x^2 + 2x - 5)(x^3 - x + 2) = x^2(x^3 - x + 2) + 2x(x^3 - x + 2) - 5(x^3 - x + 2)$$

Получили привычное для нас умножения одночленов на многочлены. Выполним эти умножения:

$$(x^2 + 2x - 5)(x^3 - x + 2) = x^2(x^3 - x + 2) + 2x(x^3 - x + 2) - 5(x^3 - x + 2) =$$
$$x^5 - x^3 + 2x^2 + 2x^4 - 2x^2 + 4x - 5x^3 + 5x - 10$$

В получившемся многочлене приведём подобные члены:

$$(x^2 + 2x - 5)(x^3 - x + 2) = x^2(x^3 - x + 2) + 2x(x^3 - x + 2) - 5(x^3 - x + 2) =$$
$$x^5 \underline{-x^3} + \cancel{2x^2} + 2x^4 - \cancel{2x^2} \underline{+4x} \underline{-5x^3} \underline{+5x} - 10 =$$
$$x^5 - 6x^3 + 2x^4 + 9x - 10$$

Одночлены, входящие в получившийся многочлен, расположим в порядке убывания степеней. Делать это необязательно. Но такая запись будет красивее:

$$(x^2+2x-5)(x^3-x+2)=x^2(x^3-x+2)+2x(x^3-x+2)-5(x^3-x+2)=$$

$$x^5\underline{-x^3}+\cancel{2x^2}+2x^4-\cancel{2x^2}\underline{+4x}\underline{-5x^3}\underline{+5x}-10=$$

$$x^5-6x^3+2x^4+9x-10=$$

$$x^5+2x^4-6x^3+9x-10$$

Вынесение общего множителя за скобки

Мы уже учились выносить общий множитель за скобки в простых буквенных выражениях. Теперь мы немного углубимся в эту тему, и научимся выносить общий множитель за скобки в многочлене. Принцип вынесения будет таким же, как и в простом буквенном выражении. Небольшие трудности могут возникнуть лишь с многочленами, состоящими из степеней.

Рассмотрим простой двучлен $6xy + 3xz$. Вынесем в нём общий множитель за скобки. В данном случае за скобки можно вынести общий множитель $3x$. Напомним, что при вынесении общего множителя за скобки, каждое слагаемое исходного выражения надо разделить на этот общий множитель:

$$6xy+3xz=3x\left(\frac{6xy}{3x}+\frac{3xz}{3x}\right)=3x(2y+z)$$

Или покороче:

$$6xy+3xz=3x(2y+z)$$

В результате получили $3x(2y + z)$. При этом в скобках образовался другой более простой многочлен $(2y + z)$. Выносимый за скобки общий множитель выбирают так, чтобы в скобках остались члены, которые не содержат общего буквенного множителя, а модули коэффициентов этих членов не имели общего делителя, кроме единицы.

Поэтому в приведенном примере за скобки был вынесен общий множитель $3x$. В скобках образовался многочлен $2y + z$, модули коэффициентов которого не имеют общего делителя кроме единицы. Это требование можно выполнить, если найти наибольший общий делитель (НОД) модулей коэффициентов исходных членов. Этот НОД стано́вится коэффициентом общего множителя, выносимого за скобки. В нашем случае исходный многочлен был $6xy + 3xz$. Коэффициенты исходных членов это числа 6 и 3, а их НОД равен 3.

А буквенную часть общего множителя выбирают так, чтобы члены в скобках не имели общих буквенных множителей. В данном случае это требование выполнилось легко. Общий буквенный множитель был виден невооруженным глазом — это был множитель x.

Пример 2. Вынести общий множитель за скобки в многочлене $x^2 + x + xy$

Все члены данного многочлены имеют коэффициент единицу. Наибольший общий делитель модулей из этих единиц есть единица. Поэтому числовая часть выносимого за скобки множителя будет единицей. Но единицу в качестве коэффициента не записывают.

Далее выбираем буквенную часть общего множителя. Прежде всего надо понимать, что любой член, входящий в многочлен, является одночленом. А одночлен это произведение чисел, переменных и степеней. Даже если членом многочлена является обычное число, его всегда можно представить в виде произведения единицы и самого этого числа. Например, если в многочлене содержится число 5, его можно представить в виде 1×5. Если в многочлене содержится число 8, то его можно представить в виде произведения множителей $2 \times 2 \times 2$ (или как 2×4)

С переменными такая же ситуация. Если в многочлене содержится член, являющийся переменной или степенью, их всегда можно представить в виде произведения. К примеру, если многочлен содержит одночлен x, его можно представить в виде произведения $1 \times x$. Если же многочлен содержит одночлен x^3, его можно представить в виде произведения xxx.

Одночлены, из которых состоит многочлен $x^2 + x + xy$, можно разложить на множители так, чтобы мы смогли увидеть буквенный сомножитель, который является общим для всех членов.

Итак, первый член многочлена $x^2 + x + xy$, а именно x^2 можно представить в виде произведения $x \times x$. Второй член x можно представить в виде $1 \times x$. А третий член xy оставим без изменения, или для наглядности перепишем его с помощью знака умножения $x \times y$

$$x \times x \ + \ 1 \times x \ + \ x \times y$$

Каждый член многочлена представлен в виде произведения множителей, из которых состоят эти члены. Легко заметить, что во всех трёх произведениях общим сомножителем является x. Выделим его:

$$x \times x \ + \ 1 \times x \ + \ x \times y$$

Этот множитель x и вынесем за скобки. Опять же при вынесении общего множителя за скобки каждое слагаемое исходного выражения делим на этот общий множитель. В нашем случае каждый член многочлена $x \times x + 1 \times x + x \times y$ нужно разделить на общий множитель x

$$x \times x + 1 \times x + x \times y = x\left(\frac{x \times \cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_1} + \frac{1 \times \cancel{x}^{1}}{\cancel{x}_1} + \frac{\cancel{x}^{1} \times y}{\cancel{x}_1}\right) = x(x + 1 + y)$$

Значит, при вынесении общего множителя за скобки в многочлене $x^2 + x + xy$, получается $x(x + 1 + y)$

$$x^2 + x + xy = x\left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{xy}{x}\right) = x(x + 1 + y)$$

Или покороче:

$$x^2 + x + xy = x(x + 1 + y)$$

В результате в скобках остаются члены, которые не имеют общих буквенных сомножителей, а модули коэффициентов этих членов не имеют общих делителей, кроме 1.

Пример 2. Вынести общий множитель за скобки в многочлене $15x^2y^3 + 12xy^2 + 3xy^2$

Определим коэффициент общего множителя, выносимого за скобки. Наибольший общий делитель модулей коэффициентов 15, 12 и 3 это число 3. Значит, число 3 будет коэффициентом общего множителя, выносимого за скобки.

Теперь определим буквенную часть общего множителя, выносимого за скобки. Её нужно выбирать так, чтобы в скобках остались члены, которые не содержат общего буквенного множителя.

Перепишем буквенные части исходного многочлена $15x^2y^3 + 12xy^2 + 3xy^2$ в виде разложения на множители. Это позволит хорошо увидеть, что именно можно вынести за скобки:

$$15xxyyy + 12xyy + 3xyy$$

Видим, что среди буквенных частей общим множителем является xyy, то есть xy^2. Если вынести этот множитель за скобки, в скобках останется многочлен, не имеющий общего буквенного множителя.

В итоге общим множителем, выносимым за скобки, будет множитель $3xy^2$

$$15x^2y^3 + 12xy^2 + 3xy^2 = 3xy^2\left(\frac{15x^2y^3}{3xy^2} + \frac{12xy^2}{3xy^2} + \frac{3xy^2}{3xy^2}\right) = 3xy^2(5xy + 4 + 1)$$

Или покороче:

$$15x^2y^3 + 12xy^2 + 3xy^2 = 3xy^2(5xy + 4 + 1)$$

Для проверки можно выполнить умножение $3xy^2(5xy + 4 + 1)$. В результате должен получиться многочлен $15x^2y^3 + 12xy^2 + 3xy^2$

$$3xy^2(5xy + 4 + 1) = 3xy^2 \times 5xy + 3xy^2 \times 4 + 3xy^2 \times 1 = 15x^2y^3 + 12xy^2 + 3xy^2$$

Пример 3. Вынести общий множитель за скобки в выражении $x^2 + x$

В данном случае за скобки можно вынести x

$$x^2 + x = x\left(\frac{x^2}{x} + \frac{x}{x}\right) = x(x + 1)$$

Это потому что первый член x^2 можно представить как xx. А второй член x представить как $1 \times x$

$$x^2 + x = xx + 1 \times x$$

Не следует на письме подробно расписывать содержимое каждого члена, разлагая его на множители. Это легко делается в уме.

Пример 4. Вынести общий множитель за скобки в многочлене $5y^2 - 15y$
В данном случае за скобки можно вынести $5y$. Наибольший общий делитель модулей коэффициентов 5 и 15 это число 5. Среди буквенных множителей общим является y

$$5y^2 - 15y = 5y\left(\frac{5y^2}{5y} - \frac{15y}{5y}\right) = 5y(y-3)$$

Пример 5. Вынести общий множитель за скобки в многочлене $5y^2 - 15y^3$
В данном примере за скобки можно вынести $5y^2$. Наибольший общий делитель модулей коэффициентов 5 и 15 это число 5. Среди буквенных множителей общим является y^2

$$5y^2 - 15y^3 = 5y^2\left(\frac{5y^2}{5y^2} - \frac{15y^3}{5y^2}\right) = 5y^2(1-3y)$$

Пример 6. Вынести общий множитель за скобки в многочлене $20x^4 - 25x^2y^2 - 10x^3$
В данном примере за скобки можно вынести $5x^2$. Наибольший общий делитель модулей коэффициентов 20, −25 и −10 это число 5. Среди буквенных множителей общим является x^2

$$20x^4 - 25x^2y^2 - 10x^3 = 5x^2\left(\frac{20x^4}{5x^2} - \frac{25x^2y^2}{5x^2} - \frac{10x^3}{5x^2}\right) = 5x^2(4x^2 - 5y^2 - 2x)$$

Пример 7. Вынести общий множитель за скобки в многочлене $a^m + a^{m+1}$
Второй член a^{m+1} представляет собой произведение из a^m и a, поскольку $a^m \times a = a^{m+1}$
Заменим в исходном примере член a^{m+1} на тождественно равное ему произведение $a^m \times a$. Так проще будет увидеть общий множитель:

$$a^m + a^{m+1} = a^m + a^m \times a$$

Теперь можно увидеть, что общим множителем является a^m. Его и вынесем за скобки:

$$a^m + a^{m+1} = a^m + a^m \times a = a^m\left(\frac{\cancel{a^m}}{\cancel{a^m}} + \frac{\cancel{a^m} \times a}{\cancel{a^m}}\right) = a^m(1+a)$$

Проверка на тождественность

Решение задачи с многочленами порой растягивается на несколько строк. Каждое следующее преобразование должно быть тождественно равно предыдущему. Если возникают сомнения в правильности своих действий, то можно подставить произвольные значения переменных в исходное и полученное выражение. Если исходное и полученное выражение будут равны одному и тому же значению, то можно быть уверенным, что задача была решена правильно.
Допустим, нам нужно вынести общий множитель за скобки в следующем многочлене:

$$2x + 4x^2$$

В данном случае за скобки можно вынести общий множитель $2x$

$$2x + 4x^2 = 2x(1 + 2x)$$

Представим, что мы не уверены в таком решении. В этом случае нужно взять любое значение переменной x и подставить его сначала в исходное выражение $2x + 4x^2$, затем в полученное $2x(1 + 2x)$. Если в обоих случаях результат будет одинаковым, то это будет означать, что задача решена правильно.
Возьмём произвольное значение x и подставим его в исходное выражение $2x + 4x^2$. Пусть $x = 2$. Тогда получим:
$2x + 4x^2 = 2 \times 2 + 4 \times 2^2 = 4 + 16 = \mathbf{20}$
Теперь подставим значение 2 в преобразованное выражение $2x(1 + 2x)$
$2x(1 + 2x) = 2 \times 2 \times (1 + 2 \times 2) = 4 \times 5 = \mathbf{20}$
То есть при $x = 2$ выражения $2x + 4x^2$ и $2x(1 + 2x)$ равны одному и тому же значению. Это значит, что задача была решена правильно. Тоже самое будет происходить и при других значениях переменных x. Например, проверим наше решение при $x = 1$

$2x + 4x^2 = 2 \times 1 + 4 \times 1^2 = 2 + 4 = \mathbf{6}$
$2x(1 + 2x) = 2 \times 1 \times (1 + 2 \times 1) = 2 \times 3 = \mathbf{6}$

Пример 2. Вычесть из многочлена $5x^2 - 3x + 4$ многочлен $4x^2 - x$ и проверить полученный результат, подставив вместо переменной x произвольное значение.
Выполним вычитание:
$$5x^2 - 3x + 4 - (4x^2 - x) = 5x^2 - 3x + 4 - 4x^2 + x = x^2 - 2x + 4$$
Мы выполнили два преобразования: сначала раскрыли скобки, а затем привели подобные члены.
Теперь проверим эти два преобразования на тождественность. Пусть $x = 2$. Подставим это значение сначала в исходное выражение, а затем в преобразованные:
$$5x^2 - 3x + 4 - (4x^2 - x) = 5 \times 2^2 - 3 \times 2 + 4 - (4 \times 2^2 - 2) = 20 - 6 + 4 - 14 = 4$$
$$5x^2 - 3x + 4 - 4x^2 + x = 5 \times 2^2 - 3 \times 2 + 4 - 4 \times 2^2 + 2 = 20 - 6 + 4 - 16 + 2 = 4$$
$$x^2 - 2x + 4 = 2^2 - 2 \times 2 + 4 = 4$$
Видим, что при каждом преобразовании значение выражения при $x = 2$ не менялось. Это значит, что задача была решена правильно.

Задания для практического занятия:
Вариант 1

1. Найдите значение многочлена $5a^2 - 3a$ при $a = -3$.

2. Выполните сложение и вычитание многочленов:
а) $(2a - 5b) + (-3a + 2b)$
б) $(5x^3 - 3x^2 - 7) + (4 + 3x^2 - 5x^3)$
в) $(x^2 - 3x) - (2x + 1)$
г) $(-2x^2 - 3x + 4) - (-2x^2 + 7x - 6)$.

3. Представьте в виде многочлена:
а) $-2a^2b \cdot (1{,}2ab^3 + 4a^3b)$
б) $7a \cdot (a - b) - b \cdot (b - 7a)$
в) $-1 \cdot (2a^2 - 3a + 1)$
г) $5a^2 - 2a(2{,}5 - b)$.

4. Решите уравнение:
а) $-7x + 5(2x - 3) = 6$
б) $3x - 5(2x - 1) = 12$
в) $5 - 2(x - 1) + 3(x - 2) = 0$.

5. Два поезда, встретившись на разъезде, продолжили движение в своем направлении. Скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого. Через 3 ч расстояние между ними было 480 км. Найдите скорость каждого поезда.
6. Выполните деление уголком

$6x^5 - 13x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 12x - 4$ на $2x^2 - 3x - 1$

7. Разложить многочлен на множители

$x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

8. Записать многочлен в $(x^2 + 3x - 2)^2 - (x^2 - x)^2$ стандартном виде. Определить степень многочлена, старший коэффициент.

Дополнительно:

9. Решите уравнение $\frac{5x-4}{3} + \frac{3x-2}{6} + \frac{2x-1}{2} = 3x - 2$.

10. Решите систему $\begin{cases} 6x + 3y = 8x - 3(2y - 4), \\ 2(2x - 3y) - 4x = 2y - 8. \end{cases}$

Вариант 2

1. Найдите значение многочлена $3a^2 - 5a$ при $a = -3$.

2. Выполните сложение и вычитание многочленов:

а) $(7a - 9b) + (-3b + 2a)$

б) $(3t^3 - 4t^2 + 7t) + (2t^2 - 6t + 7)$

в) $(5b^2 + 2b) - (4t^2 - 3t)$

г) $(-3x^2 - 5x + 1) - (-3x^2 + 2x - 9)$.

3. Представьте в виде многочлена:

а) $-3a^2b^2 \cdot (0{,}8a + 0{,}3b)$

б) $3x \cdot (x - 2a) - 6a \cdot (a - x)$

в) $-1 \cdot (-3a^2 + 2a - 1)$

г) $2a^2 - 5a(a + b)$.

4. Решите уравнение:

а) $5(x-1) + 5(3x+2) = 6x + 8$

б) $2x - 7(3x - 1) = 26$

в) $7 + 4(x - 2) - 3(x - 1) = 0$.

5. Два автомобиля едут по шоссе навстречу друг другу. Скорость одного из них на 10 км/ч меньше скорости другого. Через 2 часа после того, как они встретились, расстояние между ними стало равным 260 км. Найдите скорость каждого автомобиля.

6. Выполните деление уголком

$6x^5 - 13x^4 + 4x^3 + 9x^2 - 4x - 2$ на $3x^2 - 2x - 1$

7. Разложить многочлен на множители

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

8. Записать $(x^2 + 3x - 4)^2 - (x - 1)^3$ многочлен в стандартном виде. Определить степень многочлена, старший коэффициент.

Дополнительно:

9. Решите уравнение $\frac{3-5x}{5} + \frac{3x-5}{3} + \frac{6x+7}{15} = 2x + 1$.

10. Решите систему $\begin{cases} 4y + 20 = 2(3x - 4y) - 4, \\ 16 - (5x + 2y) = 3x - 2y. \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Многочлен — это…
2. Сложение многочленов

3. Вычитание многочленов
4. Представление многочлена в виде суммы или разности
5. Многочлен и его стандартный вид
6. Изменение порядка следования членов
7. Умножение одночлена на многочлен
8. Умножение многочлена на многочлен
9. Вынесение общего множителя за скобки

Список рекомендуемой литературы:

3. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
4. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018 .

Тема 1.3. Корни многочлена

Практическое занятие №3. Разложение многочлена на множители
количество часов 1

Цель: научиться выполнять разложение многочленов на множители различными способами и применять формулы сокращенного умножения для преобразований алгебраических выражений.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование : тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

<u>Немного теории</u>

Разложить многочлен на множители значит представить его в виде произведения более простых многочленов.

<u>Существует несколько способов разложения:</u>
1. Вынесение общего множителя за скобки
2. Способ группировки
3. С помощью формул сокращенного умножения

Практическое применение

Сначала убедимся в том, что разложение на множители – вещь полезная. Вам предлагают решить уравнение:
$2x^2 + x – 6=0$.
Для таких уравнений имеется специальное правило решения, но вы его пока еще не знаете. Как быть? Воспользуемся разложением многочлена на множители:
$2x^2 + x – 6=(2x – 3)(x + 2)$
Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$(2x – 3) (x + 2)=0$$

Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю. Значит,

либо $2x – 3 = 0$,

либо $x + 2 = 0$.

Из первого уравнения $x=1,5$, а из второго уравнения $x = -2$.
Уравнение решено, оно имеет два корня: –2 и 1,5.

Рассмотрим другую ситуацию:

Пусть нужно найти значение числового выражения

$$\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2}$$

Самое эффективное решение – дважды воспользоваться формулой разности квадратов:

$$\frac{53^2-47^2}{61^2-39^2} = \frac{(53-47)(53+47)}{(61-39)(61+39)} = \frac{6\bullet 100}{22\bullet 100} = \frac{6}{22} = \frac{3}{11}$$

Разложение на множители позволило нам сократить дробь. Позднее мы оценим это и при выполнении действий с алгебраическими дробями.

Таким образом, разложение многочлена на множители используется для решения уравнений, для преобразования числовых и алгебраических выражений. Применяется оно и в других ситуациях, как, скажем, в следующем довольно трудном, но красивом примере, где ключ к успеху опять-таки в разложении на множители.

Пример

Доказать, что для любого натурального числа n выражение n^3+3n^2+2n делится без остатка на 6.

Попробуйте его решить.

Посмотрите, как легко это можно сделать:
$P = n^3+3n^2+2n$.
Если n=1, то P = 1+3+2=6. Значит, P делится на 6 без остатка.
Если n=2, то $P = 2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2 = 8+12+4 = 24$. Следовательно, и P делится на 6 без остатка.
Если n=3, то $P = 3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3 = 27+27+6 = 60$. Поэтому и P делится на 6 без остатка.

Но вы же понимаете, что перебрать так <u>все</u> натуральные числа нам не удастся. Как быть? На помощь приходят алгебраические методы.

Имеем: $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$.
В самом деле $n(n+1) = n^2+ n$, а $(n^2+n)(n+2) = n^3+2n^2+n^2+2n = n^3+3n^2+2n$.
Итак, $P = n(n+1)(n+2)$, т.е. $p(n)$ есть произведение трех идущих подряд натуральных чисел n, $n+1$, $n+2$. Но из трех таких чисел одно обязательно делится на 3, значит и их произведение делится на 3. Кроме того, по крайней мере одно из этих чисел – четное, т.е. делится на 2. Итак, P делится и на 2, и на 3, т.е. делится на 6.
Все прекрасно, скажите вы, но как догадаться, что $n^3+3n^2+2n = n(n+1)(n+2)$?

Ответ очевиден: надо учиться разложению многочленов на множители.
К этому и перейдем.

Алгоритмы:

<u>Вынесение общего множителя за скобки</u>

Алгоритм отыскания общего множителя нескольких одночленов

1. Найти наибольший общий делитель коэффициентов всех одночленов, входящих в многочлен, - он и будет общим числовым множителем (разумеется, это относится только к случаю целочисленных коэффициентов).
2. Найти переменные, которые входят в каждый член многочлена и выбрать для каждой из них наименьший (из имеющихся) показатель степени.
3. Произведение коэффициента и переменной, найденного на первом и втором шагах, является общим множителем, который целесообразно вынести за скобки.

Пример

Разложить на множители:

$$-x^4y^3-2x^3y^2+5x^2.$$

Воспользуемся сформулированным алгоритмом.

1. Наибольший общий делитель коэффициентов –1, -2 и 5 равен 1.
2. Переменная x входит во все члены многочлена с показателями соответственно 4, 3, 2; следовательно, можно вынести за скобки x^2.
3. Переменная y входит не во все члены многочлена; значит, ее нельзя вынести за скобки.

Вывод: за скобки можно вынести x^2. Правда, в данном случае целесообразнее вынести $-x^2$. Получим:

$-x^4y^3-2x^3y^2+5x^2=-x^2(x^2y^3+2xy^2-5)$.

Способ группировки

Для уяснения сути способа группировки рассмотрим следующий пример: разложить на множители многочлен xy-6+3y-2y

Первый способ группировки:

xy-6+3y-2y=(xy-6)+(3x-2y).

Группировка неудачна.

Второй способ группировки:

xy-6+3y-2y=(xy+3x)+(-6-2y)=x(y+3)-2(y+3)=(y+3)(x-2).

Третий способ группировки:

xy-6+3y-2y=(xy-2y)+(-6+3x)=y(x-2)+3(x-2)=(x-2)(y+3).

Ответ: xy-6+3y-2y=(x-2)(y+3).

Как видите, не всегда с первого раза группировка оказывается удачной.
Если группировка оказалась неудачной, откажитесь от нее, ищите иной способ.
По мере приобретения опыта, вы будете быстро находить удачную группировку.

Разложение многочлена на множители с помощью формул сокращенного умножения

Вспомните эти формулы:

$$a^2-b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2);$$
$$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2;$$
$$a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2.$$

Первую из этих формул можно применять к выражению, представляющему собой разность квадратов (безразлично чего: чисел, одночленов, многочленов), вторую и третью – к выражению, представляющему собой разность (или сумму) кубов; последние две формулы применяются к трехчлену, представляющему собой полный квадрат, т.е. содержащему сумму квадратов двух выражений и удвоенное произведение тех же выражений.

Пример

Разложить на множители

1) x^6-4a^4. Воспользуемся первой формулой (разность квадратов):

$x^6-4a^4 = (x^3)^2-(2a^2)^2 = (x^2-2a^2)(x^3+2a^2)$.

2) a^6+27b^3. Воспользуемся третьей формулой (сумма кубов):

$a^6+27b^3 = (a^2)^3+(3b)^3 = (a^2+3b)((a^2)^2-a^2\cdot 3b+(3b)^2) = (a^2+3b)(a^4-3a^2b+9b^4)$.

3) $a^2-4ab+4b^2$. В этом примере дан трехчлен, для его разложения на множители будем пользоваться пятой формулой, если, конечно, убедимся в том, что трехчлен является полным квадратом:

$a^2-4ab+4b^2 = a^2+(2b)^2-2\cdot a\cdot 2b = (a-2b)^2$.

Мы убедились, что трехчлен содержит сумму квадратов одночленов a и $2b$, а также удвоенное произведение этих одночленов. Значит, это полный квадрат, причем квадрат разности.

Разложение многочлена на множители с помощью комбинации различных приемов

В математике не так часто бывает, чтобы при решении примера применялся только один прием, чаще встречаются комбинированные примеры, где сначала используется один прием, затем другой и т.д. Чтобы успешно решать такие примеры, мало знать сами приемы, надо еще уметь выработать план их последовательного применения. Иными словами, здесь нужны не только знания, но и опыт. Вот такие комбинированные примеры мы и рассмотрим.

__Пример__

Разложить на множители многочлен

$$36a^6b^3-96a^4b^4+64a^2b^5$$

1) Сначала займемся вынесением общего множителя за скобки. Рассмотрим коэффициенты 36, 96, 64. Все они делятся на 4, причем это – наибольший общий делитель, вынесем его за скобки. Во все члены многочлена входит переменная a (соответственно a^6, a^4, a^2), поэтому за скобки можно вынести a^2. Точно так же во все члены многочлена входит переменная b (соответственно b^3, b^4, b^5) – за скобки можно вынести b^3.
Итак, за скобки вынесем $4a^2b^3$. Тогда получим:
$36a^6b^3-96a^4b^4+64a^2b^5 = 4a^2b^3(9a^4-24a^2b+16b^2)$.

2) Рассмотрим трехчлен в скобках: $9a^4-24a^2b+16b^2$. Выясним, не является ли он полным квадратом. Имеем:
$9a^4-24a^2b+16b^2 = (3a^2)^2+(4b)^2-2\cdot3a^2\cdot4b$.
Все условия полного квадрата соблюдены, следовательно,
$9a^4-24a^2b+16b^2 = (3a^2-4b)^2$.

3) Комбинируя два приема (вынесение общего множителя за скобки и использование формул сокращенного умножения), получаем окончательный результат:

$36a^6b^3-96a^4b^4+64a^2b^5 = 4a^2b^3(3a^2-4b)^2$.

__Пример__

Разложить на множители многочлен

$$x^4+x^2a^2+a^4$$

Применим метод выделения полного квадрата. Для этого представим x^2a^2 в виде $2x^2a^2-x^2a^2$.
Получим:
$x^4+x^2a^2+a^4 = x^4+2x^2a^2-x^2a^2+a^4 = (x^4+2x^2a^2+a^4)-x^2a^2 = (x^2+a^2)^2-(xa)^2 = (x^2+a^2+xa)(x^2+a^2-xa)$

__Пример__

Разложить на множители

$$n^3+3n^2+2n$$

Сначала воспользуемся тем, что n можно вынести за скобки: $n(n^2+3n+2)$. Теперь к трехчлену n^2+3n+2 применим способ группировки, предварительно представив 3n в виде 2n+n.
Получим: $n^2+3n+2=n^2+2n+n+2=(n^2+2n)+(n+2)=n(n+2)+(n+2)=(n+2)(n+1)$.

Окончательно получаем:
$n^2+3n+2=n(n+1)(n+2)$.

__Пример__

Решить уравнение

$$x^2-6x+5=0$$

Первый способ.
Представим –6x в виде суммы –x-5x, а затем применим способ группировки:

$$x^2-6x+5 = x^2-5x+5 = (x^2-x)+(-5x+5) = x(x-1)-5(x-1) = (x-1)(x-5).$$

Тогда заданное уравнение примет вид:

$$(x-1)(x-5) = 0,$$

откуда находим, что либо x = 1, либо x = 5.

Второй способ.
Применим метод выделения полного квадрата, для чего представим слагаемое 5 в виде (9-4). Получим:
x^2-6x+5 = x^2-6x+9-4 = (x^2-6x+9)-4 = $(x-3)^2-2^2$ = (x-3-2)(x-3+2) = (x-5)(x-1).
Снова пришли к уравнению (x-1)(x-5) = 0, имеющему корни 1 и 5.
Ответ: 1, 5.

Разложение на множители квадратного трехчлена.

Квадратный трехчлен ax^2+bx+c раскладывается на два линейных множителя: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 являются корнями (комплексными или действительными).

Таким образом, разложение на множители квадратного трехчлена сводится к решению квадратного уравнения.

Пример.

Разложить квадратный трехчлен $4x^2-5x+1$ на множители.

Решение.

Найдем корни квадратного уравнения $4x^2-5x+1=0$.

Дискриминант уравнения равен $D=(-5)^2-4\cdot4\cdot1=9$, следовательно,

$$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2\cdot4}=\frac{1}{4}$$

$$x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2\cdot4}=1$$

Таким образом, $4x^2-5x+1=4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)$.

Для проверки можно раскрыть скобки: .

$$4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1)=4\left(x^2-x-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=4x^2-5x+1$$

При проверке пришли к исходному трехчлену, поэтому разложение выполнено верно.

Пример.

Разложить на множители квадратный трехчлен $3x^2-7x-11$.

Решение.

Соответствующее квадратное уравнение имеет вид $3x^2-7x-11=0$.

Найдем его корни.

$$3x^2-7x-11=0$$

$$D=(-7)^2-4\cdot3\cdot(-11)=181$$

$$x_1=\frac{7+\sqrt{D}}{2\cdot3}=\frac{7+\sqrt{181}}{6}$$

$$x_2=\frac{7-\sqrt{D}}{2\cdot3}=\frac{7-\sqrt{181}}{6}$$

Поэтому,

$$3x^2-7x-11=3\left(x-\frac{7+\sqrt{181}}{6}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{181}}{6}\right)$$

Пример.

Разложить многочлен на множители $2x^2+1$.

Решение.

Найдем корни квадратного уравнения $2x^2+1=0$.

$$2x^2+1=0$$

$$x^2=-\frac{1}{2}$$

$$x_1=\sqrt{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i$$

$$x_2=-\sqrt{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i$$

Получили пару комплексно сопряженных корней.

Разложение многочлена будет иметь вид $2x^2+1=2\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot i\right)$.

Пример.

Разложить на множители квадратный трехчлен $x^2+\frac{1}{3}x+1$.

Решение.

Решим квадратное уравнение $x^2+\frac{1}{3}x+1=0$

.

$$x^2+\frac{1}{3}x+1=0$$

$$D=\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\cdot 1\cdot 1=-\frac{35}{9}$$

$$x_1=\frac{-\frac{1}{3}+\sqrt{D}}{2\cdot 1}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{35}}{3}\cdot i}{2}=\frac{-1+\sqrt{35}\cdot i}{6}=-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot i$$

$$x_2=\frac{-\frac{1}{3}-\sqrt{D}}{2\cdot 1}=\frac{-\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{35}}{3}\cdot i}{2}=\frac{-1-\sqrt{35}\cdot i}{6}=-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot i$$

Поэтому,

$$x^2+\frac{1}{3}x+1=\left(x-\left(-\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot i\right)\right)\left(x-\left(-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot i\right)\right)=$$

$$=\left(x+\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot i\right)\left(x+\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{35}}{6}\cdot i\right)$$

Способы разложения на множители многочлена степени выше второй.

В общем случае эта задача предполагает творческий подход, так как не существует универсального метода ее решения. Но все же попробуем дать несколько наводок.

В подавляющем числе случаев, разложение многочлена на множители основано на следствии из теоремы Безу, то есть находится или подбирается корень x_1 и понижается степень многочлена на единицу делением на $(x-x_1)$. У полученного многочлена ищется корень x_2 и процесс повторяется до полного разложения.

Если же корень найти не удается, то используются специфические способы разложения: от группировки, до ввода дополнительных взаимоисключающих слагаемых.

Дальнейшее изложение базируется на навыках решения уравнений высших степеней с целыми коэффициентами.

Использование формул сокращенного умножения и бинома Ньютона для разложения многочлена на множители.

Иногда внешний вид многочлена наводит на мысль о способе его разложения на множители.

К примеру, после несложных преобразований коэффициенты выстраиваются в строчку из треугольника Паскаля, то есть, являются коэффициентами бинома Ньютона.

Пример.

Разложить многочлен $x^4+4x^3+6x^2+4x-2$ на множители.

Решение.

Преобразуем выражение к виду:

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-2=(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)-3$$

Последовательность коэффициентов суммы в скобках явно указывают, что это есть $(x+1)^4$.

Следовательно, $x^4+4x^3+6x^2+4x-2=(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)-3=(x+1)^4-3$.

Теперь применим формулу разности квадратов:

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-2=(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)-3=$$
$$=(x+1)^4-3=\left((x+1)^2-\sqrt{3}\right)\left((x+1)^2+\sqrt{3}\right)$$

Выражение во второй скобке действительный корней не имеет, а для многочлена из первой скобки еще раз применим формулу разности квадратов:

$$x^4+4x^3+6x^2+4x-2=(x^4+4x^3+6x^2+4x+1)-3=$$
$$=(x+1)^4-3=\left((x+1)^2-\sqrt{3}\right)\left((x+1)^2+\sqrt{3}\right)=$$
$$=\left(x+1-\sqrt[4]{3}\right)\left(x+1+\sqrt[4]{3}\right)\left(x^2+2x+1+\sqrt{3}\right)$$

Пример.

Разложить на множители $x^3+6x^2+12x+6$.

Решение.

Преобразуем выражение:

$$x^3+6x^2+12x+6=x^3+3\cdot2\cdot x^2+3\cdot2^2\cdot x+2^3-2=(x+2)^3-2$$

Применим формулу сокращенного умножения разность кубов:

$$x^3+6x^2+12x+6=(x+2)^3-2=$$
$$=\left(x+2-\sqrt[3]{2}\right)\left((x+2)^2+\sqrt[3]{2}(x+2)+\sqrt[3]{4}\right)=$$
$$=\left(x+2-\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2+x\left(2+\sqrt[3]{2}\right)+4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)$$

Способ замены переменной при разложении многочлена на множители.

Часто замена переменной позволяет понизить степень многочлена и разложить его на множители.

Пример.

Разложить на множители x^6+5x^3+6.

Решение.

Напрашивается замена $y=x^3$:

$$x^6+5x^3+6=\{y=x^3\}=y^2+5y+6$$

Корнями полученного квадратного трехчлена являются *y=-2* и *y=-3*, поэтому,

$$x^6+5x^3+6=\{y=x^3\}=y^2+5y+6=$$
$$=(y+2)(y+3)=(x^3+2)(x^3+3)$$

Применяем формулу сокращенного умножения сумма кубов:

$$x^6+5x^3+6=\{y=x^3\}=y^2+5y+6=$$
$$=(y+2)(y+3)=(x^3+2)(x^3+3)=$$
$$=\left(x+\sqrt[3]{2}\right)\left(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}\right)\left(x+\sqrt[3]{3}\right)\left(x^2-\sqrt[3]{3}x+\sqrt[3]{9}\right)$$

Задания для практического занятия:

1. Разложите на множители:

1) 3a + 12b

2) 2a + 2b + a^2 + ab

3) $9a^2 – 16b^2$
4) $7a^2b – 14ab^2 + 7ab$
5) $m^2 + mn – m – mg – ng + g$
6) $4a^2 – 4ab + b^2$
7) $2(3a^2 + bc) + a(4b + 3c)$
8) $25a^2 + 70ab + 49b^2$

2. Сократите дробь, разложив на множители числитель и знаменатель.

1) $\frac{a^2-b^2}{a+b}=$

2) $\frac{8-3c}{9c^2-64}=$

3) $\frac{b^2-c^2}{b^4n-c^4n}=$

4) $\frac{9-6a+a^2}{3-a}=$

5) $\frac{d^2-6d+9}{d-3}=$

6) $\frac{4y^2-4y+1}{2-4y}$

7) $\frac{4y^2-4y+1}{4y^2-1}=$

8) $\frac{ax-ay+bx-by}{a+b}=$

3. Разложите на множители:

1) $9c^2-(4-3c)^2$
2) $64x^2-y^8$
3) $121a^2-b^{12}$
4) $49x^2-(8-7x)^2$

4. Разложите на множители используя формулы сокращённого умножения

1) $64a^3+1$
2) m^3n^3-27
3) $a^2-12a+36$
4) $9-(2c-1)^2$
5) $1-(2x-3)^2$
6) $1-(8a-3)^2$
7) $(x^2+1)^2-4x^2$
8) $(a^2+4)^2-16a^2$

5. Разложите на множители способом вынесения общего множителя за скобки

1) 6a-6b

2) 4x+12y

3) 8x+18y

4) 15a-25b

5) $3b^2$-3b

6) $Ab+ab^2$

7) $15x^3y^2+12x^2y-24x^2y^3$

8) $12a^2b^2-36a^2b+44abc$

6. Разложите на множители используя метод группировки и вынесение общего множителя за скобки

1) $3a+3-na-n$

2) $2mx-3m-4x+6$

3) $3m-3n+mn-n^2$

4) $7kn-6k+14n-12$

5) $6a^2-2ab-3ac+bc$

6) $7c^2-c-c^3+7$

7) $x^3+28-14x^2-2x$

8) 8) $18a^2+27ab+14ac+21bc$

Контрольные вопросы

1. Многочлен – определение, виды, свойства.
2. Алгоритм разложения многочлена способом группировки
3. Алгоритм разложения многочлена с помощью формул сокращенного умножения
4. Алгоритм разложения многочлена с помощью вынесение общего множителя за скобки
5. Использование формул сокращенного умножения и бинома Ньютона для разложения многочлена на множители.

Список рекомендуемой литературы:

5. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
6. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018 .

Раздел 2. Алгебра
Тема 2.1 Линейная алгебра

Практическое занятие № 4. Решение системы линейных уравнений с помощью матрицы.

количество часов 1

Цель: формирование умений решать системы линейных уравнений разными способами: способом подстановки, способом алгебраического сложения, графическим способом

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств , используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Метод Гаусса

Метод Гаусса − это метод перехода от исходной системы линейных уравнений (при помощи эквивалентных преобразований) к системе, которая решается проще, чем исходная система.
Эквивалентными преобразованиями системы линейных уравнений являются:

- перемена местами двух уравнений в системе,
- умножение какого-либо уравнения в системе на ненулевое действительное число,
- прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{1}$$

Запишем систему (1) в матричном виде:

$$Ax=b \tag{2}$$

где

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix},\ x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

A-матрица коэффициентов системы, b − правая часть ограничений, x− вектор переменных, которую нужно найти. Пусть rang(A)=p.
Эквивалентные преобразования не меняют ранг матрицы коэффициентов и ранг расширеннной матрицы системы. Не меняется также множество решений системы при эквивалентных преобразованиях. Суть метода Гаусса заключается в приведении матрцы коэффициентов A к диагональному или ступенчатому.
Построим расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{4}$$

Предположим $a_{11}\neq 0$. Если это не так, то можно поменять местами эту строку со строкой с ненулевым элементом в столбце 1 (если нет таких строк, то переходим к следующему столбцу). Обнуляем все элементы столбца 1 ниже ведущего элемента a_{11}. Для этого сложим строки 2,3, ... m со строкой 1, умноженной на $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}$, ..., $-a_{m1}/a_{11}$, соответственно. Тогда (4) примет следующий вид:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mn}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right], \tag{5}$$

На следующем этапе обнуляем все элементы столбца 2, ниже элемента $a_{22}^{(1)}$. Если данный элемент нулевой, то эту строку меняем местами со строкой, лежащий ниже данной строки и имеющий ненулевой элемент во втором столбце. Далее обнуляем все элементы столбца 2 ниже ведущего элемента a_{22}. Для этого сложим строки 3, ... m со строкой 2, умноженной на $-a_{32}/a_{22}$, ..., $-a_{m2}/a_{22}$, соответственно. Продолжая процедуру, получим матрицу диагонального или ступенчатого вида. Пусть полученная расширенная матрица имеет вид:

(6)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2p}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_{pp}^{(k)} & \dots & a_{pn}^{(k)} & b_p^{(k)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{p+1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & b_m^{(k)} \end{array}\right],$$

Обратим внимание на последние строки. Если $b_{p+1}^{(k)}$,..., $b_m^{(k)}$ равны нулю, то система линейных уравнений имеет решение, если же хотя бы один из этих чисел отлично от нуля, то система несовместна. Иными словами, система (2) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A навен рангу расширенной матрицы $(A|b)$.

Пусть $b_{p+1}^{(k)}=0, \dots, b_m^{(k)}=0$. Тогда

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1p}x_p=b_1-a_{1p+1}x_{p+1}-\dots-a_{1n}x_n$$
$$a_{22}^{(1)}x_2+\dots+a_{2p}^{(1)}x_p=b_2^{(1)}-a_{2p+1}^{(1)}x_{p+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (7)$$
$$a_{pp}^{(k)}x_p=b_p^{(k)}-a_{p,p+1}^{(k)}x_{p+1}-\dots-a_{pn}^{(k)}x_n$$

Так как $rangA=rang(A|b)$, то множество решений (7) есть $(n-p)-$ многообразие.

Следовательно $n-p$ неизвестных $x_{p+1}, \dots, x_n$ можно выбрать произвольно. Остальные неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_p$ из системы (7) вычисляются так. Из последнего уравнения выражаем x_p через остальные переменные и вставляем в предыдущие выражения. Далее из предпоследнего уравнения выражаем x_{p-1} через остальные переменные и вставляем в предыдущие выражения и т.д. Рассмотрим метод Гаусса на конкретных примерах.

Примеры решения системы линейных уравнений методом Гаусса

Пример 1. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 6x_1 & +1x_2 & +2x_3=21 \\ 4x_1 & -6x_2 & +16x_3=2 \\ 3x_1 & +8x_2 & +1x_3=2 \end{cases}$$

Матричный вид записи: $Ax=b$, где

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 16 \\ 3 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \; b=\begin{bmatrix} 21 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Для решения системы, запишем расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 21 \\ 4 & -6 & 16 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Обозначим через a_{ij} элементы i-ой строки и j-ого столбца.

Исключим элементы 1-го столбца матрицы ниже элемента $a_{1\,1}$. Для этого сложим строки 2,3 со строкой 1, умноженной на -2/3,-1/2 соответственно:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 21 \\ 0 & -\frac{20}{3} & \frac{44}{3} & -12 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 & -\frac{17}{2} \end{array}\right]$$

Исключим элементы 2-го столбца матрицы ниже элемента a2 2. Для этого сложим строку 3 со строкой 2, умноженной на 9/8:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & 2 & 21 \\ 0 & -\frac{20}{3} & \frac{44}{3} & -12 \\ 0 & 0 & \frac{33}{2} & -22 \end{array}\right]$$

Делим каждую строку матрицы на соответствующий ведущий элемент (если ведущий элемент существует):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{11}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} \end{array}\right]$$

Из вышеизложенной таблицы можно записать:

$$x_3=-\frac{4}{3}$$
$$x_2=\frac{9}{5}+\frac{11}{5}\cdot x_3$$
$$x_1=\frac{7}{2}-\frac{1}{6}\cdot x_2-\frac{1}{3}\cdot x_3$$

Подставив верхние выражения в нижние, получим решение.

Решение:

$x_1=\frac{62}{15}$, $x_2=-\frac{17}{15}$, $x_3=-\frac{4}{3}$

Пример 2. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

Матричный вид записи: *Ax*=*b*, где

$$\begin{cases} 5x_1 & +4x_2 & -2x_3 & +3x_4=11 \\ 1x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +1x_4=35 \\ 6x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +4x_4=46 \end{cases}$$

Матричный вид записи: Ax=b, где

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 11 \\ 35 \\ 46 \end{bmatrix}$$

Для решения системы, построим расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -2 & 3 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 35 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 46 \end{array}\right]$$

Обозначим через a_{ij} элементы *i*-ой строки и *j*-ого столбца.

Исключим элементы 1-го столбца матрицы ниже элемента a_{11}. Для этого сложим строки 2,3 со строкой 1, умноженной на -1/5,-6/5 соответственно:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{22}{5} & \frac{2}{5} & \frac{164}{5} \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{22}{5} & \frac{2}{5} & \frac{164}{5} \end{array}\right]$$

Исключим элементы 2-го столбца матрицы ниже элемента a_{22}. Для этого сложим строку 3 со строкой 2, умноженной на -1:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 4 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{22}{5} & \frac{2}{5} & \frac{164}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Делим каждую строку матрицы на соответствующий ведущий элемент (если ведущий элемент существует):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{11}{3} & \frac{1}{3} & \frac{82}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Выразим переменные x_1, x_2 относительно остальных переменных.

$$x_2=\frac{82}{3}-\frac{11}{3}\cdot x_3-\frac{1}{3}\cdot x_4$$
$$x_1=\frac{11}{5}-\frac{4}{5}\cdot x_2+\frac{2}{5}\cdot x_3-\frac{3}{5}\cdot x_4$$

где x_3, x_4– произвольные действительные числа.

Подставив верхние выражения в нижние, получим решение.

Решение:

$$x_1=-\frac{59}{3}+\frac{10}{3}\cdot x_3-\frac{1}{3}\cdot x_4$$
$$x_2=\frac{82}{3}-\frac{11}{3}\cdot x_3-\frac{1}{3}\cdot x_4$$

где x_3, x_4– произвольные действительные числа.

Что называется решением системы уравнений?

2. Какая система уравнений называется совместной, несовместной?
3. Какая система уравнений называется определенной, неопределенной?
4. Какая матрица системы уравнений называется главной?
5. Как вычислить вспомогательные определители системы линейных алгебраических уравнений?
6. В чем состоит суть метода Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений?
7. Какой может быть система линейных алгебраических уравнений, если ее главный определитель равен нулю

Метод Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений

Дадим ряд необходимых определений.

Система линейных уравнений называется ***неоднородной***, если хотя бы один ее свободный член отличен от нуля, и ***однородной***, если все ее свободные члены равны нулю.

Решением системы уравнений называется упорядоченный набор чисел, который, будучи подставленным вместо переменных в систему, обращает каждое ее уравнение в тождество.

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она решений не имеет.

Совместная система уравнений называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Рассмотрим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений, имеющую при $n=m$ следующий общий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad \textbf{(1.5)}$$

Главной матрицей А системы линейных алгебраических уравнений называется матрица, составленная из коэффициентов, стоящих при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель главной матрицы системы называется ***главным определителем*** и обозначается Δ.

Вспомогательный определитель Δ_i получается из главного определителя путем замены i-го столбца на столбец свободных членов. $(i=\overline{1;n})$

Теорема 1.1 (теорема Крамера). Если главный определитель системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля, то система имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \text{ где } i=\overline{1;n}. \qquad \textbf{(1.6)}$$

Если главный определитель $\Delta=0$, то система либо имеет бесконечное множество решений (при всех нулевых вспомогательных определителях), либо вообще решения не имеет (при отличии от нуля хотя бы одного из вспомогательных определителей). •

В свете приведенных выше определений, теорема Крамера может быть сформулирована иначе: если главный определитель системы линейных алгебраических уравнений отличен от нуля, то система является совместной определенной и при этом $x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}$ **;** если главный определитель нулевой, то система является либо совместной неопределенной (при всех $\Delta_i=0$), либо несовместной (при отличии хотя бы одного из Δ_i от нуля).

После этого следует провести проверку полученного решения.

Пример 1.4. Решить систему методом Крамера

$$\begin{cases} x-4y+2z=-5 \\ 4x+y-3z=-3 \\ 2x+3y+4z=1 \end{cases}$$

Решение. Так как главный определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=4+24+24-4+64+9=121$$

отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-20+12-18-2-48-45=-121$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 4 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-12+30+8+12+80+3=121$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -5 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1-60+24+10+16+9=0.$$

Воспользуемся формулами Крамера (1.6): $x=\frac{-121}{121}=-1,\ y=\frac{121}{121}=1,\ z=0$ •

Пример 1.5. Данные дневной выручки молочного цеха от реализации молока, сливочного масла и творога за три дня продаж (на 2017 год) занесены в таблицу 1.4.

Таблица 1.4

	Объем проданной продукции за день			Дневная выручка (руб)
	Молоко (л)	Масло (кг)	Творог (кг)	
1 день	1898	42	114	126256
2 день	1908	46	122	130264
3 день	1856	39	109	121908

Определить стоимость 1 единицы продукции молокоцеха каждого вида.

Решение. Обозначим через x – стоимость 1 литра молока, y – 1 кг сливочного масла, z – 1 кг творога. Тогда, учитывая данные таблицы 1.4, выручку молочного цеха каждого из трех дней реализации можно отобразить следующей системой:

$$\begin{cases} 1898x + 42y + 114z = 126256 \\ 1908x + 46y + 122z = 130264 \\ 1856x + 39y + 109z = 121908 \end{cases}.$$

Решим систему методом Крамера. Найдем главный определитель системы по формуле (1.2):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1898 & 42 & 114 \\ 1908 & 46 & 122 \\ 1856 & 39 & 109 \end{vmatrix} = 1898 \cdot 46 \cdot 109 + 1908 \cdot 39 \cdot 114 + 42 \cdot 122 \cdot 1856 - 1856 \cdot 46 \cdot 114 -$$
$$- 1908 \cdot 42 \cdot 109 - 1898 \cdot 39 \cdot 122 = 9516572 + 8482968 + 9510144 -$$
$$- 9732864 - 8734824 - 9030684 = 11312$$

Так как он отличен от нуля, то система имеет единственное решение. Вычислим вспомогательные определители с помощью формулы (1.2):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 126256 & 42 & 114 \\ 130264 & 46 & 122 \\ 121908 & 39 & 109 \end{vmatrix} = 633047584 + 579153744 + 624656592 - 639285552 - 596348592 -$$
$$- 600726048 = 497728$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1898 & 126256 & 114 \\ 1908 & 130264 & 122 \\ 1856 & 121908 & 109 \end{vmatrix} = 26949276848 + 26516452896 + 28588398592 - 27561778176 -$$
$$- 26257712832 - 28228528848 = 6108480$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1898 & 42 & 126256 \\ 1908 & 46 & 130264 \\ 1856 & 39 & 121908 \end{vmatrix} = 10643543664 + 9394961472 + 10154339328 - 10779232256 -$$
$$- 9769219488 - 9642401808 = 1990912$$

По формулам Крамера (1.6) имеем:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{497728}{11312} = 44,$$
$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{6108480}{11312} = 540,$$
$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1990912}{11312} = 176.$$

Вернувшись к обозначениям, видим, что стоимость 1 литра молока равна 44 рубля, 1 кг масла – 540 рублей, 1 кг творога – 176 рублей •

Задания для практического занятия:

1. Решите системы линейных уравнений

1) $\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ 2x - y = 4, \\ -x + y + z = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y - 3z = 2, \\ x - 4y - 13z = 14, \\ -3x + 5y + 4z = 0; \end{cases}$ 4)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5; \end{cases}$$

5) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_3 + 3x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + y - z = 0, \\ -x - y + 2z = 0, \\ 2x - z = 0; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

2. Найдите решения системы линейных уравнений для всех значений параметра a

1) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + az = a + 8; \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Что называется решением системы уравнений?
2. Какая система уравнений называется совместной, несовместной?
3. Какая система уравнений называется определенной, неопределенной?
4. Какая матрица системы уравнений называется главной?
5. Как вычислить вспомогательные определители системы линейных алгебраических уравнений?
6. В чем состоит суть метода Крамера решения систем линейных алгебраических уравнений?
7. Какой может быть система линейных алгебраических уравнений, если ее главный определитель равен нулю

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 3. Основы логики
Тема 3.1. Высказывания
Практическое занятие №5. Составление таблиц истинности
количество часов 1

Цель: научиться строить таблицы истинности сложных высказываний.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию
Вспомним таблицы истинности основных логических операций:

Инверсия (отрицание): образуется из высказывания с помощью добавления частицы «не» к сказуемому или использования оборота речи «неверно что».

X	$\overline{\tilde{O}}$
1	0
0	1

Дизъюнкция (сложение): образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «или»

X	Y	X V Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликация (следование): логическая функция *от двух переменных,* которая принимает *нулевое* значение, когда *из истины следует ложь*.

X	Y	$X \Rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция (умножение): образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «и»

X	Y	X & Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквивалентность (равнозначность): Логическая функция *от двух переменных,* которая принимает *единичное* значение при *одинаковых значениях* переменных.

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Опорный конспект

Инверсия **истинна**	тогда	Высказывание **ложно**
Дизъюнкция **ложна** Конъюнкция истинна	и	**Оба** **ложны** высказывания **истинны**
Конъюнкция истинна Дизъюнкция **ложна**	только	**Хотя бы одно** **истинно** высказывание **ложно**
Импликация **ложна**	тогда,	**Из истинного** высказывания следует **ложное** высказывание
Эквивалентность **истинна**	когда	**Оба** высказывания **ложны** или **оба** высказывания **истинны**

Порядок выполнения операций

1. Логическое отрицание - инверсия (НЕ)
2. Логическое умножение - конъюнкция (И)
3. Логическое сложение - дизъюнкция (ИЛИ)
4. Логическое следование - импликация
5. Равнозначность - эквивалентность

Алгоритм построения таблицы истинности

1. Вычислить количество строк (2^n+1, где n-кол-во простых высказываний) и столбцов таблицы (сумма переменных и операций).
2. Начертить таблицу и заполнить заголовок.
3. Заполнить столбцы значений переменных.
4. Заполнить остальные столбцы в соответствии с таблицами истинности соответствующих операций.

Примеры:

1.Построить таблицу истинности логической функции $F=(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$

В этой функции две переменные (A и B), значит в таблице истинности будет $2^2+1=5$ строк и 2+5(операций)=7 столбцов. Построим таблицу:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Продолжим заполнение таблицы в соответствии с таблицами истинности логических операций:

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \vee B$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B})$
0	0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0

2.Построить таблицу истинности логической функции F= $\overline{\overline{A} \wedge \overline{B \wedge C}}$

В этой функции три переменные (A B и C), значит в таблице истинности будет $2^3+1=9$ строк и 3+5(операций)=7 столбцов. Построим таблицу:

A	B	C	$\overline{A}$	B∧C	$\overline{B \wedge C}$	$\overline{A} \wedge \overline{B \wedge C}$	$\overline{\overline{A} \wedge \overline{B \wedge C}}$
0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	0	0	1

Построить таблицы истинности логических функций
(составных высказываний)

1) F= (A ∨ B) ∧ C⇒ (A ∧ C) ∨ (B ∧ C)

Ответ: 1 1 1 1 1 1 1 1

2) F= (A ∧ B) ∨ C⇔(A ∧ C) ∧ (B ∧ C)

Ответ: 1 0 1 1 1 0 0 1

Задания для практического занятия:

Определите, какие из следующих пар высказываний являются эквивалентными:

1. A⇒B; $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$;
2. A⇒B; A ∨ $\overline{B}$;
3. A) ∨ (B∧C); (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)

Контрольные вопросы

1. Что такое высказывание (приведите пример)?
2. Что такое составное высказывание (приведите пример)?
3. Как называются и как обозначаются (в языке математики) следующие операции: ИЛИ, НЕ, И, ЕСЛИ … ТО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ЛИБО …ЛИБО?
4. Укажите приоритеты выполнения логических операций.
5. Составьте таблицу истинности для следующих операций: отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.
6. Изобразите функциональные элементы: конъюнктор, дизъюнктор, инвертор.
7. Какие логические выражения называются равносильными?
8. Записать основные законы алгебры логики.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №6. Применение таблицы истинности для доказательства истинности высказываний

количество часов 1

Цель: научиться доказывать истинность высказываней с помощью таблиц истинности

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :

тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

В математике мы имеем дело с различными утверждениями, например,

$A \equiv$ {число 100 делится на 4};
$B \equiv$ {через две точки можно провести две прямые};
$C \equiv$ {число 0,00000001 очень мало}.

Относительно одних утверждений можно сказать, что в них говорится нечто правильное, относительно других – утверждается нечто неверное. Например, утверждение A – верное, утверждение B – неверное. Относительно утверждения C нельзя сказать, является оно верным или нет, так как оно не имеет точного смысла.

Определение 16.12.

Утверждение, которое является верным, называется ***истинным***.

Определение 16.13.

Утверждение, которое является неверным, называется ***ложным***.

Определение 16.14.

Высказыванием называется любое утверждение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Из определения 16.14 вытекает

Свойство 16.5.

Всякое высказывание является либо истинным, либо ложным (***закон исключенного третьего***).

Свойство 16.6.

Никакое высказывание не может быть одновременно истинным и ложным (***закон противоречия***).

Свойство 16.7.

Предложение, о котором невозможно однозначно решить вопрос, истинно оно или ложно, высказыванием не является.

На множестве высказываний можно ввести операции, позволяющие образовывать новые высказывания. Например, если заданы два высказывания A{сейчас солнечно} и B{сейчас ветрено}, то с помощью связок «и», «или», «если..., то...», «либо..., либо...», «тогда и только тогда, когда», «неверно, что» можно образовать новые высказывания вида: {сейчас солнечно и ветрено}, {сейчас солнечно или ветрено}, {если сейчас солнечно, то сейчас ветрено} и т.д. Такие высказывания называют составными, а входящие в них высказывания A и B – элементарными.

Два составных высказывания A и B называются равносильными, если они одновременно истинны или одновременно ложны при любых предположениях относительно истинности входящих в них элементарных высказываний. В этом случае пишут $A = B$.

Определение 16.15.

Отрицанием высказывания A называется высказывание, которое истинно, когда A ложно, и ложно, если A истинно. Обозначение: $\bar{A}$ Читается: «неверно, что A».

Данное определение записывают с помощью ***таблицы истинности***, в которой буква «И» означает истинное высказывание, а буква «Л» – ложное.

А	И	Л
$\bar{A}$	Л	И

Например: отрицанием высказывания {через две точки можно провести две прямые} является высказывание {через две точки нельзя провести две прямые}. Отрицанием высказывания {число 37 не делится на 2} будет высказывание {число 37 делится на 2}.

Определение 16.16.

Конъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, которое истинно в том и только в том случае, если истинны оба высказывания. Обозначение: $A \wedge B$, читается: «A и B». Таблица истинности имеет вид:

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$A \wedge B \wedge B$	И	Л	Л	Л

Например: конъюнкцией высказываний {3 < 8} и {8 < 11} является высказывание {3 < 8 < 11}. Или, конъюнкцией высказываний {точка A лежит на прямой a} и {точка A лежит на прямой b} является высказывание {точка A лежит на прямой a и на прямой b}.

Определение 16.17.

Дизъюнкцией двух высказываний A и B называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания. Обозначение: $A \vee B$, читается: «A или B». Таблица истинности имеет вид:

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$A \vee B$	И	И	И	Л

Примеры: дизъюнкцией высказываний

- {3 < 8} и {3 = 8} является высказывание {3 < 8 < 11};
- {точка A лежит на прямой a} и {точка A лежит на прямой b} является высказывание {точка A лежит на прямой a или на прямой b}, где связка "или" не имеет разделительного смысла. То есть точка A может лежать либо только на прямой a, либо только на прямой b, либо же на прямой a и прямой b одновременно.

Свойство 16.9.

Операции дизъюнкции и конъюнкции коммутативны.

$A \vee B = B \vee A$ и $A \wedge B = B \wedge A$

Доказательство

Для доказательства достаточно сравнить таблицы истинности высказываний $A \vee B$ и $B \vee A (A \wedge B$ и $B \wedge A)$ Покажем для $A \vee B$ и $B \vee A$.

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$A \vee B$	И	И	И	Л

B	И	И	Л	Л
A	И	Л	И	Л
$B \vee A$	И	И	И	Л

Свойство 16.10.

Операции дизъюнкции и конъюнкции ассоциативны.

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ и $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

Доказательство

Высказывание $A \vee (B \vee C)$ истинно только если одновременно истинны *A*, *B* и *C*, а во всех других случаях – ложно. Высказывание $(A \vee B) \vee C$ также истинно, только если *A*, *B* и *C* одновременно истинны. Совпадение истинности двух высказываний доказывает их эквивалентность. Аналогично высказывание $A \vee (B \vee C)$ложно, только если ложны одновременно все три высказывания *A*, *B* и *C*, но в этом случае ложно и$(A \vee B) \vee C$ Во всех остальных случаях оба высказывания $A \vee (B \vee C)$ и$(A \vee B) \vee C$ – истинны. Следовательно, $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

Свойство 16.11.

Для любых трех высказываний *A*, *B* и *C* справедливы равенства

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \wedge C)$$

Доказательство

Пусть$(A \vee B) \wedge C$ – истинно. Это возможно, только если истинны С и $(A \vee B)$ а это значит, что С – истинно, а А и В не являютя одновременно ложными. Отсюда следует, что истинным является одно из двух высказываний $(A \wedge C)$ или$(B \wedge C)$, то есть$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$– истинно. Далее, если $(A \vee B) \wedge C$ – ложно, то С и $(A \vee B)$ не являются одновременно истинными, то есть либо С ложно, либо ложно$(A \vee B)$ или либо ложно С, либо ложны одновременно А и В. Отсюда одновременно ложны $(A \wedge C)$ и $(B \wedge C)$ то есть ложно $(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ Следовательно, высказывания по определению равносильны и справедливо равенство $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
Пусть$(A \wedge B) \vee C$ – истинно. Тогда истинно либо С, либо $(A \wedge B)$ то есть либо истинно С, либо одновременно истинны А и В. В любом случае тогда истинны $(A \vee C) u (B \vee C)$ одновременно, а значит, истинно$(A \vee C) \wedge (B \vee C)$. Если же$(A \wedge B) \vee C$ – ложно, то одновременно ложны и С, и $(A \wedge B)$ то есть С – ложно, а А и В не являются одновременно истинными (либо А ложно, либо В ложно). Тогда ложно либо $(A \vee C)$ либо $(B \vee C)$ то есть – ложно. Отсюда $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Свойство 16.12.

Дизъюнкция любого высказывания *A* и его отрицания $\bar{A}$ – ***тождественно истинна***.
Обозначение: $A \vee \bar{A} = И$

Свойство 16.13.

Для любых двух высказываний *A* и *B* справедливы ***формулы де Моргана***:

$a)\ \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ б) $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$

Доказательство
а) Составим таблицы истинности правой и левой частей равенства.

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$A \wedge B$	И	Л	Л	Л
$\overline{A \wedge B}$	Л	И	И	И

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$\bar{A}$	Л	Л	И	И
$\bar{B}$	Л	И	Л	И
$\bar{A} \vee \bar{B}$	Л	И	И	И

Сравнивая последние строчки таблицы, приходим к требуемому равенству.
б) Аналогично, сравнивая таблицы истинности правой и левой частей, получаем их равносильность:

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$A \vee B$	И	И	И	Л
$\overline{A \vee B}$	Л	Л	Л	И

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$\bar{A}$	Л	Л	И	И
$\bar{B}$	Л	И	Л	И
$\bar{A} \wedge \bar{B}$	Л	Л	Л	И

Определение 16.18.

Высказывание «если A, то B» называют ***импликацией*** высказываний A и B, если оно ложно лишь в случае, когда A – истинно, а B – ложно. Обозначение: $A \Rightarrow B$ Таблица истинности имеет вид:

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$A \Rightarrow B$	И	Л	И	И

Высказывание A называют условием, а B – заключением импликации.

Свойство 16.14.

Для любых двух высказываний A и B справедливо

$$(A \Rightarrow B) = (\bar{A} \vee B)$$

<u>Доказательство</u>
Следует из сравнения таблиц истинности:

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$\bar{A}$	Л	Л	И	И
$A \Rightarrow B$	И	Л	И	И
$\bar{A} \vee B$	И	Л	И	И

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \Rightarrow B$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	$B \Rightarrow A$	$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$
И	И	Л	Л	И	И	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И	И
Л	И	И	Л	И	И	Л	Л
Л	Л	И	И	И	И	И	И

Определение 16.19.

Импликацией, ***обратной*** данной импликации $A \Rightarrow B$, называется импликация $B \Rightarrow A$.

Определение 16.20.

Импликацией, ***противоположной*** данной импликации , $A \Rightarrow B$ называется импликация $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$.

Например: импликацией высказываний {100 делится на 4} и {100 четное число} является высказывание {если 100 делится на 4, то 100 – четное число}. Импликация обратная данной будет тогда такой: {если 100 – четное число, то 100 делится на 4}. Как мы видим, если импликация истинна, то обратная к ней не всегда будет истинна. Противоположной к исходной будет импликация {если 100 не делится на 4, то 100 не является четным числом}.

Свойство 16.15.

Справедливы равенства $(A \Rightarrow B) = (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$ *и* $(B \Rightarrow A)$и $(\bar{A} \Rightarrow \bar{B})$

Доказательство
См. доказательство свойства 16.14.

Определение 16.21.

Эквиваленцией высказываний *A* и *B* называется высказывание, которое истинно, когда оба высказывания *A* и *B* истинны или оба ложны. Обозначение: $A \Leftrightarrow B$ Таблица истинности имеет вид:

A	И	И	Л	Л
B	И	Л	И	Л
$A \Leftrightarrow B$	И	Л	Л	И

Например: эквиваленцией двух высказываний {точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях от прямой *a*} и {отрезок *AB* пересекает прямую *a*} является высказывание {точки *A* и *B* лежат в разных полуплоскостях от прямой *a* тогда и только тогда, когда отрезок *AB* пересекает прямую *a*}.

Определение 16.22.

Пусть предложение содержит переменную, которая может принимать различные значения, причем подстановка любого из значений переменной превращает предложение в высказывание. Тогда это предложение называют ***одноместным предикатом***. Множество *X* всех значений переменной *x* называют ***областью определения предиката***. Обозначение предиката: *A* (*x*).

Определение 16.23.

Множеством истинности предиката *A* (*x*), $x \in X$ называется подмножество $T \sqsubset X$, на котором *A* (*x*) истинно.

Например: на рис. 16.3.2 изображены точки, соединенные несколькими отрезками. На множестве *X*, состоящем из точек *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* (*X* = {*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*}), задан одноместный предикат *A* (*x*) = {к точке *x* в рассматриваемой фигуре примыкают три отрезка}.

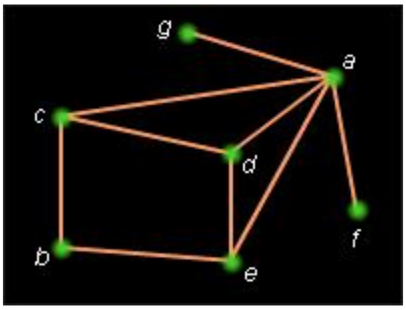


Рисунок 16.3.1

Ниже приведена таблица истинности этого предиката:

A (*a*)	*A* (*b*)	*A* (*c*)	*A* (*d*)	*A* (*e*)	*A* (*f*)	*A* (*g*)
Л	Л	И	И	И	Л	Л

Множеством истинности данного предиката, соответственно, будет множество точек *T* = {*c*, *d*, *e*}.

Определение 16.24.

Два предиката *A* (*x*) и *B* (*x*) называются ***эквивалентными***, если у них совпадают области определения и множества истинности. Обозначение: $A(x) \sim B(x)$

Определение 16.25.

Квантором общности называют символ $\forall$, означающий слово «все».

Высказывание $(\forall x \in X)P(x)$читается: «для всех *x* из *X* справедливо *P* от *x*».
Квантором существования называют символ ∃, означающий слово «существует».
Высказывание $(\exists x \in X)Px$ читается: «существует такое *x* из *X*, что справедливо *P* от *x*».

Справедливо а) $\overline{(\forall x)Ax} = (\exists x)\overline{A(x)}$, б) $\overline{(\exists x)Ax} = (\forall x)\overline{A(x)}$

<u>Доказательство</u>
а) Если истинно высказывание $(\forall x)A(x)$ то это означает, что не для всех x выполнено $A(x)$ другими словами, существует x, для которого выполнено $\overline{A(x)}$, то есть когда истинно выражение $(\exists x)\overline{A(x)}$. Если $(\forall x)A(x)$ – ложно, то$(\forall x)A(x)$ – истинно, тогда $(\exists x)\overline{A(x)}$ – ложно. Это доказывает равносильность высказываний и равенство $(\forall x)A(x) = (\exists x)\overline{A(x)}$
б) Так как формула пункта а) верна для любого предиката *A (x),* возьмем предикат$\overline{A(x)}$
Получим$(\forall x)\overline{A(x)} = (\exists x)\overline{\overline{A(x)}} = (\exists x)A(x)$
Строя отрицание обеих частей, получаем $\overline{(\forall x)\overline{A(x)}} = \overline{(\exists x)A(x)}$ С учетом того, что для любого высказывания $\bar{\bar{A}} = A$ имеем $(\forall x)A(x) = (\exists x)A(x)$ что и требовалось доказать.

Так же, как и для высказываний, на множестве предикатов можно ввести операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции. Для этого устанавливают правила, которые позволяют находить множество истинности составного предиката, если известны множества истинности составляющих его элементарных предикатов.

Задания для практического занятия:

0. $S = \neg((A \wedge B) \to (B \to A)) \to ((A \vee B) \to (A \wedge \neg B))$.
1. $S = (\neg((A \to B) \to (A \wedge B)) = (B \to A) \to \neg(A \vee B))$.
2. $S = (\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg A) \to (\neg A \vee B)$.
3. $S = ((A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B) = (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B))$.
4. $S = ((\neg B \wedge (\neg A \vee B)) \to \neg A)$.
5. $S = ((B \to A) \to (A \wedge B) = (A \to B) \wedge (A \vee B))$.
6. $S = (A \to B) \to ((A \wedge \neg B) \to \neg A)$.
7. $S = ((A \vee B) \to (A \wedge B) = \neg((A \to B) \to (\neg A \wedge B)))$.
8. $S = \neg(A \to B) \wedge \neg(\neg B \to \neg A) \vee (\neg A \vee B)$.
9. $S = (\neg((A \vee B) \to \neg(B \to A)) = (A \to B) \to (A \wedge B))$.
10. $S = (\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg(A \wedge B)) \vee (B \to A)$.
11. $S = (\neg((B \to A) \to (A \wedge B)) = (A \to B) \to \neg(A \vee B))$.
12. $S = ((A \wedge \neg B) \to B) \to (A \to B)$.
13. $S = (\neg(A \wedge B) = (A \to \neg B))$.
14. $S = (\neg A \vee B) \to ((A \wedge \neg B) \to B)$.
15. $S = ((B \to A) = ((\neg A \wedge B) \to A)))$.
16. $S = (B \to A) \to (A \wedge B) \vee (A \to B) \to \neg(A \vee B)$.
17. $S = \neg((A \to B) \to (A \wedge B)) \vee \neg((B \to A) \to (\neg A \wedge \neg B))$.
18. $S = ((A \vee B) \to \neg(B \to A) = \neg((A \to B) \to (A \wedge B)))$.
19. $S = ((A \to B) \wedge \neg(A \wedge B)) \to \neg((B \to A) \wedge (A \vee B))$.

Контрольные вопросы
1. Что такое логика?
2. Что называется высказыванием?
3 Что такое утверждение?
4. Что называется рассуждением?
5 . Что такое умозаключение?
6. Что такое логическое выражение?
7 . Какие бывают логические выражения?
8. Что такое алгебра логики?
9. Понятие и обозначение инверсии.
10. Таблицы истинности инверсии
11. Понятие и обозначение конъюнкции.
12. Таблицы истинности конъюнкции.
13. Понятие и обозначение дизъюнкции.
14. Таблицы истинности дизъюнкции.
15. Понятие и обозначение импликации.
16. Таблицы истинности импликации.

17. Понятие и обозначение эквивалентности
18. Таблицы истинности эквивалентности.
19. Порядок действий в сложных логических выражений.
20. Способ изменения порядка действий в логических выражениях

Список рекомендуемой литературы:

7. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
8. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018 .

Практическое занятие №7. Определение равносильности высказываний
количество часов 1

Цель: изучить логические операции и основные равносильности алгебры логики, научиться составлять таблицы истинности для формул алгебры логики и преобразовывать формулы, используя основные равносильности и правила поглощения.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Определение. Две формулы алгебры логики А и В называются равносильными, если они принимают одинаковые логические значения при любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний (переменных).

Обозначение. А≡В.

Пример.

$\overline{\overline{x}} \equiv x,\ x \vee x \equiv x,\ \left(x \wedge \overline{x}\right) \vee y \equiv y$

Определение. Формула А называется тождественно истинной (тавтологией), если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных (напр., $x \vee \overline{x},\ x \to \left(y \to x\right)$).

Определение. Формула А называется тождественно ложной (противоречием), если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее переменных (напр., $x \wedge \overline{x}$).

Утверждение. Отношение равносильности рефлексивно, симметрично, транзитивно.

Связь между понятиями равносильности и эквивалентности: если формулы А и В равносильны, то формула А↔В тавтология, и обратно, если формула А↔В тавтология, то формулы А и В равносильны.

Равносильности алгебры логики можно разбить на 3 группы:

1. Основные равносильности.

. $x \wedge x \equiv x,\ x \vee x \equiv x$ – законы идемпотентности;

. $x \wedge 1 \equiv x$;

- $x \vee 1 \equiv 1$;
- $x \wedge 0 \equiv 0$;
- $x \vee 0 \equiv x$;
- $x \wedge \overline{x} \equiv 0$ – закон противоречия;
- $x \vee \overline{x} \equiv 1$ – закон исключенного третьего;
- $\overline{\overline{x}} \equiv x$ – закон снятия двойного отрицания;
- $x \vee (y \wedge x) \equiv x, \; x \wedge (y \vee x) \equiv x$ – законы поглощения.

1. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

- $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \wedge (y \to x)$;
- $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$;
- $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;
- $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$;
- $x \wedge y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$;
- $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$.

Замечание. Из равносильностей группы 2 следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание, или дизъюнкцию и отрицание. Дальнейшее исключение операций невозможно. Например, если использовать только конъюнкцию, то уже такая простая формула, как не может быть выражена с помощью операции конъюнкции.

Существуют операции, с помощью которых может быть выражена любая из 5 логических операций:

1) *Связка Шеффера* – дизъюнкция отрицаний.

Обозначение. $x|y \equiv \overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$ («*x* не совместно с *y*»).

Логические значения связки Шеффера описываются следующей таблицей истинности:

x	*y*	*x*|*y*
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Имеют место следующие равносильности: а) $\overline{x} \equiv x|x$; б) $x \wedge y \equiv (x|y)|(x|y)$.

2) *Связка Лукасевича* – конъюнкция отрицаний.

Обозначение. $x{\downarrow}y \equiv \overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$ («ни *x*, ни *y*»).

Логические значения связки Лукасевича описываются следующей таблицей истинности:

x	*y*	*x*↓*y*

1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

- $x \wedge y \equiv y \wedge x$ – коммутативность конъюнкции;
- $x \wedge y \equiv y \wedge x$ – коммутативность дизъюнкции;
- $x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$ – ассоциативность конъюнкции;
- $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – ассоциативность дизъюнкции;
- $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ – дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;
- $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ – дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Замечание. Равносильности группы 3 показывают, что над формулами алгебры логики можно проводить те же преобразования, что и в алгебре чисел.

Равносильные преобразования формул

Используя равносильности групп 1–3 можно часть формулы или формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называются *равносильными*.

Равносильные преобразования используются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул. Формула А считается проще равносильной ей формулы В, если она содержит меньше букв, меньше логических операций. При этом обычно операции эквивалентность и импликация заменяются операциями дизъюнкции и конъюнкции, а отрицание относят к элементарным высказываниям.

Пример 1. Доказать равносильность $\overline{x \to y} \equiv x \,\&\, \bar{y}$.

Решение. Для доказательства равносильности подвергнём её левую часть равносильными преобразованиями:

$$\overline{x \to y} \equiv \overline{\bar{x} \vee y} \equiv \bar{\bar{x}} \,\&\, \bar{y} \equiv x \,\&\, \bar{y}$$

Пример 2. Упростить формулу $A \equiv (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \,\&\, y$ **.**

Решение. Подвергнём формулу *A* равносильным преобразованиям:

$$A \equiv (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \,\&\, y \equiv (\overline{\overline{x \vee y}} \vee \bar{x} \vee y) \,\&\, y \equiv$$
$$\equiv (x \vee y \vee \bar{x} \vee y) \,\&\, y \equiv ((x \vee \bar{x}) \vee (y \vee y)) \,\&\, y \equiv$$
$$\equiv (1 \vee y) \,\&\, y \equiv 1 \,\&\, y \equiv y.$$

Пример 3. Доказать, что формула $A \equiv x \to (y \to x)$ тождественно истинная.

Решение. Подвергнём формулу *A* равносильным преобразованиям

$$A \equiv x \to (y \to x) \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \vee x) \equiv \bar{x} \vee (x \vee \bar{y}) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee x) \vee \bar{y} \equiv 1 \vee \overline{y \equiv 1}.$$

Задания для практического занятия:

Упражнение 1. Доказать равносильность:

1) $(x \vee y)\&(x \vee \overline{y}) \equiv x$;

2) $x \vee (\overline{x}\& y) \equiv x \vee y$;

3) $xy \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y} \equiv x \rightarrow y$;

4) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \& y \rightarrow z$;

5) $x \equiv (x \& y \& z) \vee (x \& y \& \overline{z}) \vee (x \& \overline{y} \& z) \vee (x \& \overline{y} \& \overline{z})$;

Упражнение 2. Упростить формулу:

1) $\overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y}} \vee (x \rightarrow y) \cdot x$;

2) $(x \leftrightarrow y)\&(x \vee y)$;

3) $(x \rightarrow y)\&(y \rightarrow z) \rightarrow (z \rightarrow x)$;

4) $(x \wedge z) \vee (x \wedge \overline{z}) \vee (y \vee z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z)$.

5) $(x \& (y \vee z \rightarrow y \vee z)) \vee (y \& x \& \overline{y}) \vee x \vee (y \& \overline{x \& \overline{x}})$;

6) $(x \rightarrow y)\&(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$;

Упражнение 3. Доказать тождественную истинность или тождественную ложность формул:

1) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow z)$;

2) $(x \wedge y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow (y \rightarrow z))$;

Контрольные вопросы

1. Что называется формулой алгебры логики?
2. Что такое минимизация формулы алгебры логики?
3. Какие типы формул ты знаешь?
4. Как проверить равносильность двух формул логики?
5. Каким образом можно упростить логические формулы?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Раздел 4. Множества

Тема 4.1. Множества. Действия над множествами

Практическое занятие № 8, 9. Операции над множествами. Изображение множеств и операций над множествами с помощью диаграмм Эйлера-Венна

количество часов 2

Цель: научится задавать элементы множества; различать и классифицировать множества, выполнять операции над множествами.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :

тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Операции над множествами

Равенство множеств.

Множества *A* и *B* считаются равными, если они состоят *из одних и тех же* элементов.
Равенство множеств обозначают так: *A* = *B*.
Если множества не равны, то пишут *A* ¹ *B*.
Запись равенства двух множеств *A* = *B* эквивалентна записи *A* Ì *B*, или *B* Ì *A*.
Например, множество решений уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$содержит те же самые элементы (числа 2 и 3), что и множество простых чисел, меньших пяти. Эти два множества равны. (Простым числом называется натуральное число, которое делится без остатка только на 1 и на само себя; при этом 1 – простым числом не является.)

Пересечение (умножение) множеств.

Множество *D*, состоящее из всех элементов, принадлежащих *и множеству A и множеству B*,

называется пересечением множеств *A* и *B* и обозначается *D* = *A*   *B*.
Рассмотрим два множества: *X* = {0, 1, 3, 5} и *Y* = {1, 2, 3, 4}. Числа 1 и 3 и только они принадлежат одновременно обоим множествам *X* и *Y*. Составленное из них множество {1, 3} содержит все общие для множеств *X* и *Y* элементы. Таким образом, множество {1, 3} является пересечением рассмотренных множеств *X* и *Y*:

{1, 3} = {0, 1, 3, 5}   {1, 2, 3, 4}.
Для отрезка [-1; 1] и интервала]0; 3[пересечением, т. е. множеством, состоящим из общих элементов, является промежуток]0; 1] (рис. 1).

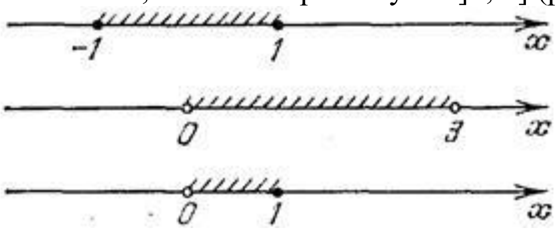


Рис. 1. Пересечением отрезка [-1; 1] и интервала]0; 3[является промежуток]0; 1]

Пересечением множества прямоугольников и множества ромбов является множество квадратов.

Пересечение множества учеников восьмых классов данной школы и множества членов химического кружка той же школы есть множество учеников восьмых классов, являющихся членами химического кружка.

Пересечение множеств (и другие операции – см. ниже) хорошо иллюстрируется при наглядном изображении множеств на плоскости. Эйлер предложил для этого использовать круги. Изображение пересечения (выделено серым) множеств *A* и *B* при помощи кругов Эйлера представлено на рис. 2.

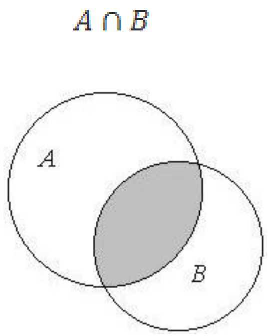


Рис. 2. Изображение пересечения (выделено серым) множеств *A* и *B* при помощи кругов Эйлера

Для наглядного представления соотношений между несколькими подмножествами какого-либо универсума. Венн предложил использовать круги и прямоугольники. При этом универсум представляется множеством всех точек некоторого прямоугольника, а его подмножества – соответствующими кругами. В дальнейшем такие схемы стали называть диаграммами Эйлера-Венна. Пересечение множеств (выделено серым) изображено на диаграмме рис. 3.

$A \cap B$

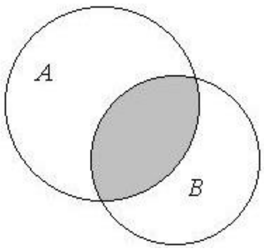


Рис. 3. Диаграмма Эйлера-Венна пересечения (выделено серым) множеств *A* и *B*, являющихся подмножествами некоторого универсума, изображённого в виде прямоугольника

Если множества *A* и *B* не имеют общих элементов, то говорят, что эти множества не пересекаются или что их пересечение – пустое множество, и пишут $A \cap B$ = Æ.

Например, пересечение множества чётных чисел с множеством нечётных чисел пусто.

Пустым является и пересечение числовых промежутков]-1; 0] и [2; +¥[(рис. 4).

Рис. 4. Пересечение числовых промежутков]-1; 0] и [2; +¥[представляет собой пустое множество

Пересечение любого множества *A* с пустым множеством есть, очевидно, пустое множество: $A \cap$ Æ = Æ.

Можно рассматривать пересечение *n* множеств:

$$A = \bigcup_{i=1} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n,$$

при этом в *A* входят только те элементы, которые входят во все множества $A_1, A_2, \ldots A_n$.

Например, если *A*, *B* и *C* – соответственно множества учеников класса, решивших на контрольной по математике задачу по алгебре, задачу по геометрии, задачу по тригонометрии, то пересечение этих множеств есть множество учеников этого класса, решивших все три задачи.

Объединение (сумма) множеств.

Объединением множеств *A* и *B* называется такое множество *C*, *каждый* элемент которого содержится *хотя бы в одном* из множеств *A* или *B*: $C = A \cup B$.

Изображение объединения множеств (выделено серым) при помощи кругов Эйлера представлено на рис. 5.

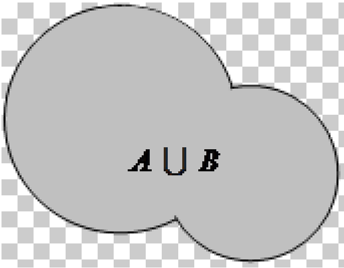


Рис. 5. Объединение множеств A и B

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$ и $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, то $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$.

Объединением множества учеников школы моложе 12 лет с множеством учеников тойже школы старше 10 лет является множество всех учеников данной школы.

Можно рассматривать объединение n множеств:

$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n$,

при этом в A входят все элементы, которые входят хотя бы в одно из множеств A_1, A_2, … A_n.

Например, множество всех действительных чисел R состоит из множества положительных чисел R^+, множества отрицательных чисел R^- и множества $\{0\}$, т.е.: $R = R^+ \cup R^- \cup \{0\}$.

Объединение множеств вершин треугольников, вписанных в данную окружность, представляет собой множество точек этой окружности.

Задача 2.

Пусть E – некоторый универсум, а множество A принадлежит этому универсуму, т.е. A Ì E.

Записать и изобразить с помощью диаграмм Эйлера-Венна пересечение и объединение этих множеств.

Решение.

Универсум E изобразим в виде прямоугольника, а его подмножество A – в виде круга, расположенного внутри прямоугольника.

Для случая пересечения получаем (см. рис. 6 – пересечение выделено серым цветом): $A \cap E = A$.

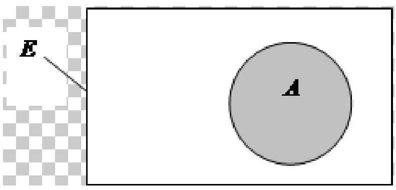


Рис. 6. Пересечение (выделено серым) универсума E и его подмножества – множества A

Для случая объединения рассматриваемых множеств (см. рис. 7 – объединение выделено серым цветом) имеем: $A \cup E = E$.

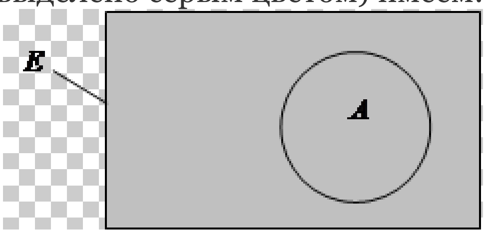


Рис. 7. Объединение (выделено серым) универсума E и его подмножества – множества A.

Разность двух множеств. Дополнение.
Разностью двух множеств A и B называется множество G, содержащее *лишь те* элементы из A, которые *не входят* в B: $G = A \setminus B$ (рис. 8).
Например, $G = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 4\}$.

Если множество B – подмножество множества A (B Ì A), то разность $A \setminus B$ называется <u>дополнением</u> к B до A (рис. 9). Например, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{2, 4\}$, то множество $\{1, 3, 5, 6\}$ – дополнение к B до A.

Дополнение к A до универсума E имеет особое обозначение: $E \setminus A$ = ØA (рис. 10).

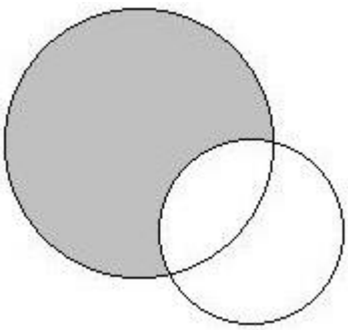


Рис. 8. Разность $A \setminus B$ (выделено серым) двух множеств A и B

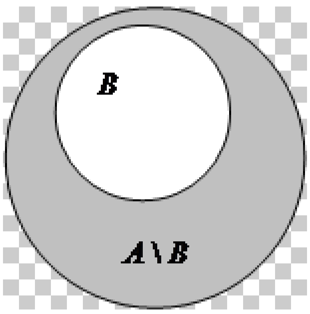


Рис. 9. Разность $A \setminus B$ (выделено серым) является дополнением к B до A

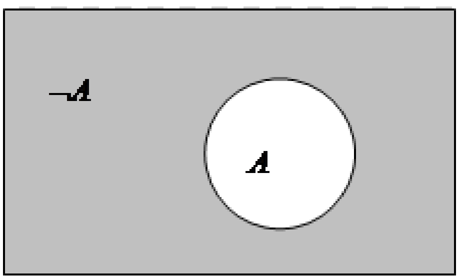


Рис. 10. Дополнение (выделено серым) к A до универсума E имеет особое обозначение ØA: $E \setminus A$ = ØA

Задача 3. Рассмотрим множество всех студентов. Пусть A – множество студентов, учащихся на юридических факультетах. B – множество студентов, изучающих английский язык. Описать множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, ØA.

Решение.

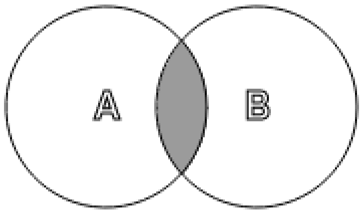
1) $A \cup B$ – это множество студентов, которые либо учатся на юридических факультетах, либо изучают английский язык, либо и то и другое вместе.
2) $A \cap B$ – это множество студентов-юристов, изучающих английский язык.
3) $A \setminus B$ – множество студентов-юристов, которые не изучают английский язык.
4) $\emptyset A$ – множество всех студентов-не юристов.·

Несмотря на всю абстрактность и разнообразие множеств, есть несколько основных операций, аргументами которых могут выступать абсолютно любые множества. Операции эти рекомендуется понимать и помнить в не меньшей степени, чем само определение множества, ибо они, наравне с этим определением, являются опорой математики.
Итак, пусть у нас есть два произвольных множества A и B .
Объединением множеств и называется множество C , содержащее и все элементы A , и все элементы B; и только их. (Причём если какой-то элемент есть и там, и там, то в C он будет, разумеется, в единственном экземпляре, ведь, как мы заметили выше, элементы в множествах не повторяются.) Множество С обозначается как $A \cup B$; причём мы можем записать его, используя введённые выше обозначения:
$C = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
То есть операция объединения множеств имеет чёткую логическую интерпретацию: если x принадлежит C, то либо x принадлежит A , либо x принадлежит B (вариант «и то, и то», разумеется, тоже возможен).
Например, если $A \subset B$, то $A \cup B = B$, потому что все элементы из A и так уже содержатся в B .
Далее, *пересечением* множеств A и B называется множество C , содержащее только те элементы, что есть и в A, и в B . Множество C обозначается как $A \cap B$; причём мы опять-таки можем записать его, используя общие обозначения:
$C = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$
То есть логическая интерпретация операции пересечения такая: если x принадлежит C , то x непременно принадлежит иA , и B .
А что произойдёт, если у множествA и B нет никаких общих элементов?
Множество $C = A \cap B$ тогда не должно содержать ни одного элемента. Так и будет! Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\emptyset$.
Кстати, когда говорят о двух непересекающихся множествах A и B , то их объединение иногда обозначают специальным значком$A \sqcup B$, чтобы подчеркнуть, что «слагаемые» не пересекаются.
Разностью множеств A и B называется множество C , содержащее все элементы A , не содержащиеся в B.C обозначается через $A \setminus B$ и в общих обозначениях записывается как
$C = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$

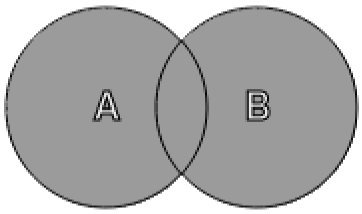
То есть C — это множество A , из которого «вырезали» множество B .
Симметрической разностью множеств A и B называется множество $C = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Оно обозначается как $A \Delta B$. Легко видеть, откуда у этой операции такое название — в отличие от обычной разности, она *симметрична*, то есть от перемены мест «слагаемых» «сумма» не изменяется.

3.1. Диаграммы Венна

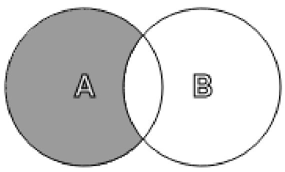
Диаграммы Венна — отличный способ сделать вышеизложенное ещё понятнее и очевиднее. Вот пример диаграммы Венна, изображающей результат операции пересечения:



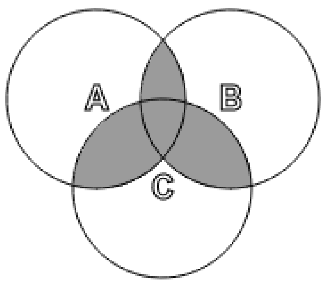
То есть просто наши множества A и B совершенно загадочной для нас природы изображаются схематически в виде кругов. Такой подход позволяет предельно наглядно изобразить результаты элементарных операций над множествами. На картинке выше заштриховано пересечение множеств A и B. А вот как будет выглядеть их объединение:



А вот разность:



Диаграммы Венна позволяют изобразить ситуации и посложнее, и в дальнейшем мы будем ими пользоваться для доказательства некоторых соотношений. Вот пример диаграммы Венна с тремя множествами:



(Попробуйте отгадать, какая формула с A, B *и* C соответствует такому множеству!)

3.2. Законы де Моргана

Первое, в чём мы попытаемся разобраться с помощью диаграмм Венна, — это два *закона де Моргана*.

Для этого нам понадобятся кое-какие приготовления. Давайте возьмём какое-нибудь большое множество Ω (например, вещественную плоскость) и будем предполагать, что наши множества A и B являются подмножествами Ω. При таком рассмотрении мы можем ввести ещё одну элементарную операцию — операцию *дополнения*.

Дополнением ко множеству A во множестве Ω называется множество $C = \Omega \setminus A$. Оно обозначается как $\bar{A}$ (если только из контекста понятно, в каком Ω идёт дело; если нет, то используются альтернативные обозначения, например A^{Ω}

Теперь, зная понятие дополнения и зафиксировав какое-нибудь произвольное Ω на ваш вкус, мы можем сформулировать два логических *закона де Моргана*:

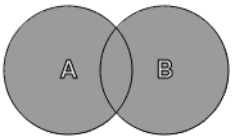
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$

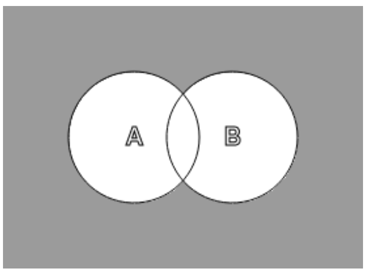
Законы эти я назвал логическими, потому что они пришли к нам из особого раздела математики — математической логики. Огастес Де Морган не видел в них какие-либо множества — он видел логическое утверждение A и логическое утверждение B (под логическим я подразумеваю утверждение, которое заведомо либо является истиной, либо ложью). Объединение A и B было для него логическим утверждением «верно хотя бы одно из утверждений A и B», пересечение — «верны одновременно и , A и B», а дополнение к значило утверждение, противоположное (то есть являющееся истинным, если ложно, и ложным, если истинно). Вспомните наши замечания по поводу логической интерпретации операций над множествами — вот они и пригодились.

Давайте теперь, как обещали, убедимся в верности законов де Моргана с помощью диаграмм Венна. Для этого возьмём в качестве примера первый закон и просто изобразим, что за множества находятся в левой и правой части равенства.

Итак, во-первых,

$A \cup B =$ 

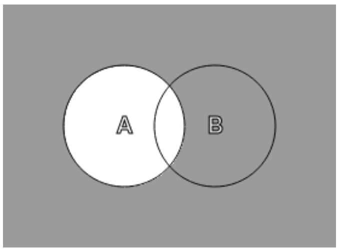
Следовательно,

$\overline{A \cup B} =$ 

На диаграмме Ω — это весь прямоугольник.

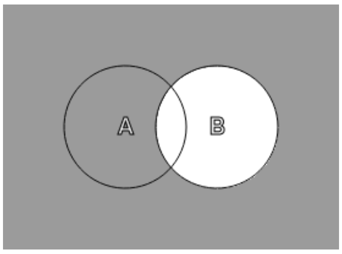
Во-вторых, имеем

$\bar{A} =$



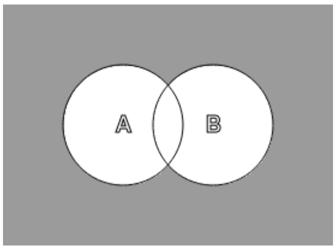
и

$\bar{B} =$



Следовательно,

$\overline{A \cap B} =$



Итак, мы получили в левой и правой части формулы одно и то же множество. Точно так же можно доказать и второй закон. Впрочем, строгим доказательством это назвать нельзя, но, хотя и так, его полезность сложно переоценить. Диаграммы Венна дали нам понять, *почему* справедлив закон де Моргана, — и это самое важное. Ну а строгое доказательство — это уже дело техники. (Попробуйте его проделать!)

3.3. Произведение множеств

Ещё одна крайне важная и часто встречающаяся операция над множествами — их *произведение*. Чтобы дать определение этой причудливой операции, нам потребуется понятие *набора*. *Набором*, или *кортежем* называется совокупность конечного числа элементов, заданных в определённом порядке. Важно: в наборе, в отличие от нашего традиционного множества, *элементы могут повторяться*. Набор из элементов $x_1, x_2, \dots, x_k$ зачастую обозначается как $(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Собственно, в этом параграфе нас будет интересовать по большей части один частный случай набора — *упорядоченная пара*. *Упорядоченная пара* — это просто набор из двух элементов. Пару из элементов a *и* b мы будем обозначать как $(a$ *и* $b)$ (не путать с интервалом вещественной прямой!).

Вот теперь можно перейти и к самому интересному.

Представьте, что у нас есть два непустых множества A и B . Их элементы, как обычно, могут не иметь между собой ничего общего; сами множества могут пересекаться, а могут и нет — в данный момент нас это совершенно не волнует. Так вот, *декартовым произведением* двух множеств A и B называется множество C всевозможных упорядоченных пар $(a$ *и* $b)$, в которых $a \in A$ *и* $b \in B$ и . Оно обозначается как $A \times B$.

Итак, что же мы сделали? Мы «скрестили» два множества A и B , получив новое множество с совершенно новыми элементами. Если раньше, например, элементами «множителей» A и B были числа, то мы получим множество, элементы которого — пары чисел.

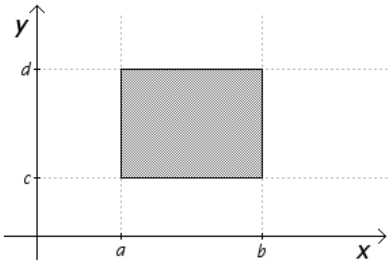
Например, пусть $A = \{1, 2, 3\}$ *и* $B = \{4,5,6\}$. Тогда

$A \times B = \{(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6)\}$

Кстати, множество $A \times B$ можно записать в удобной форме, которую мы уже изучили выше: $A \times B = \{(a, b): a \in B \text{ и } b \in B\}$

Рассмотрим пример посложнее. Вы, наверное, помните, что точки на плоскости удобно описывать двумя числами — её координатами. То есть любой точке плоскости M с координатами x_M, y_M соответствует упорядоченная пара (x_M, y_M) ! Значит, упорядоченные пары вещественных чисел можно рассматривать как точки на плоскости. Так и будем делать.

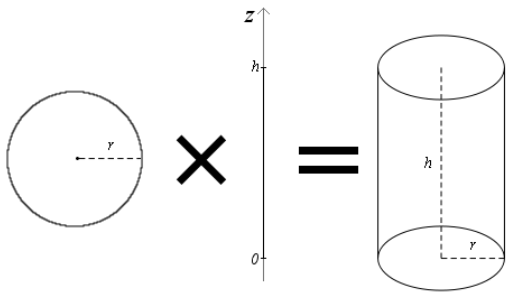
Теперь пусть $A = [a, b] \text{ и } B = [c, d]$и — два отрезка вещественной прямой. Тогда их декартовым произведением будет множество точек плоскости C , которое имеет вид



То есть мы получаем прямоугольник на плоскости! Действительно, если первые координаты всех входящих в C точек изменяются от a до b , а вторые — от c до d, то фигура, которую они образуют, и будет изображённым выше прямоугольником.

Давайте двигаться дальше. Что, если полученый прямоугольник мы умножим на ещё один отрезок $[p, q]$? Элементами полученного множества будут упорядоченные пары вида (s,z) , где $z \in [p, q]$, а s — тоже упорядоченная пара вида(x,y) . То есть вся эта конструкция имеет вид(x,y,z) . Давайте отождествим её с набором из трёх элементов — и полученное нами множество теперь можно связать с некоторым множеством в трёхмерном пространстве. Можете самостоятельно проверить, что в данном случае это будет прямоугольный параллелепипед размера$(b - a) \times (b - c) \times (q - p)$

Ещё одним примером трёхмерной фигуры, полученной декартовым произведением множеств, может быть цилиндр:



Кстати, заметьте, что круг декартовым произведением двух множеств *в декартовых координатах* уже не получить (попробуйте это доказать!).

Для удобства вводят иногда определение декартова произведения n множеств; декартовым произведением n множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ называют множество

$A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n\}$

Здесь элементами произведения сразу являются наборы из элементов исходных множеств, а не пары, содержащие другие пары, что позволяет сразу рассматривать множество как многомерную фигуру без дополнительных замечаний, сделанных нами выше. Кстати, такое произведение обозначается как $A_1 \times A_2 \times \dots A_n$.

Свойства операций над множествами

Свойства множеств относительно операции объединения	Свойства множеств относительно операции пересечения
1. Коммутативность	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
2. Ассоциативность	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
3. Дистрибутивность	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. Идемпотентность	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
5. Закон де Моргана	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Операции с множеством $\varnothing$	
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
7. Операции с множеством U	
$A \cup U = U \Rightarrow U = \overline{\varnothing} \Rightarrow \overline{U} = \varnothing$	$A \cap U = A$
8. Законы поглощения:	
$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup \overline{A} = U$	$A \cap \overline{A} = \varnothing$
9. Свойства операции разности:	
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$	$A \setminus B = A \cap \overline{B}$, $A \setminus A = \varnothing$
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$	$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
10. Свойства операции симметричной разности:	
$A \Delta B = B \Delta A$	
$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$	
$(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$	
$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$	

Задания для практического занятия:
Вариант 1.

Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:
а) – 76 ϵ R; б) 107 ϵ Z; в) $\sqrt{625} = Q$
Задание 2. Выпишите все элементы множества Д, если Д – множество четных однозначных натуральных чисел.
Задание 3. Запишите множество общих делителей чисел 120 и 150.
Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:
а) А = {2; 3; 7}, В = {3; 5; 7};
б) А =$\langle a, p, \gamma \rangle$, В =$\langle a, b, p, \gamma, r \rangle$.
Задание 5. Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:
а) (- ∞; 5) и (1; + ∞); б) (1; 3) и [1; + ∞); в) [0; 2] и (- ∞; 0).
Вариант 2.
Задание 1. Укажите, какое из утверждений правильное:
а) – 52 ϵ N; б) 20,18 ϵ Z; в) 10 ϵ Q.
Задание 2. Выпишите все элементы множества А, если А – множество цветов радуги.
Задание 3. Запишите множество натуральных делителей чисел
а) 60; б) 73.
Задание 4. Найдите пересечение и объединение множеств А и В, если:
а) А = {a; b; c}, В = {b; d};

б) A = {0; 1; 2}, B = { - 3; - 2; - 1; 0}.

<u>Задание 5.</u> Найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

а) (- 7; 7) и (- ∞; - 1); б) [0; 3) и [- 3; 0]; в) [4; + ∞) и [1; 2).

Контрольные вопросы

1. Какие числа называют натуральными, целыми, рациональными, действительными? Сформулируйте определения.
2. Что называют множеством?
3. Что такое элемент множества?
4. Что называют объединением множеств? Что называют пересечением множеств?
5. Какое множество называют пустым?
2. Выполните задания согласно своему варианту. Работу оформите по схеме решения типовых заданий.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Тема 4.2. Конечные множества

Практическое занятие №10. Решение задач с помощью комбинаторных конструкций

количество часов 1

Цель: отработать навыки применения определений элементов комбинаторики, ее основных свойств и формул при решении упражнений и задач по теме множества.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Комбинаторика как наука изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. Природа элементов в данном случае не имеет значения [4, 6].

Мы разделяем задачи пересчета, перечисления и оптимизации.

Если нас интересует, сколько элементов, принадлежащих конечному множеству, обладает неким свойством (набором свойств), то это задача *пересчета.*

Если необходимо выделить все элементы множества, обладающие заданным свойством, то это задача *перечисления.*

Если на множестве задана некая целевая функция и нас интересуют элементы множества, на которых функция достигает экстремального значения, то это задача *оптимизации.*

При решении любого типа указанных задач используются следующие понятия [4].

Подмножество из *т* элементов на множестве *X,* состоящем из *п* элементов, называется (л, *т)-выборкой,* где *т* — объем этой выборки. Если (л, л?)-выборка рассматривается с учетом порядка элементов

Комбинаторные задачи на множествах

Комбинаторика как наука изучает количества комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. Природа элементов в данном случае не имеет значения [4, 6].

Мы разделяем задачи пересчета, перечисления и оптимизации.

Если нас интересует, сколько элементов, принадлежащих конечному множеству,

обладает неким свойством (набором свойств), то это задача *пересчета.*
Если необходимо выделить все элементы множества, обладающие заданным свойством, то это задача *перечисления.*
Если на множестве задана некая целевая функция и нас интересуют элементы множества, на которых функция достигает экстремального значения, то это задача *оптимизации.*
При решении любого типа указанных задач используются следующие понятия [4].
Подмножество из *т* элементов на множестве *X*, состоящем из *п* элементов, называется (л, *т)-выборкой,* где *т* — объем этой выборки. Если (л, л?)-выборка рассматривается с учетом порядка элементов в ней, то она называется (л, л7)-размещением и обозначается *А*™ от слова arrengment. Если *т* = л, то такое (л, л)-размещение называется собственно *Р^-перестановкой.*
Если порядок элементов в выборке (л, *т)* не имеет значения,
то она называется (л, *т)-сочетанием* и обозначается *С*™ от слова combination.
И перестановки, и сочетания могут быть с повторениями и без повторений.
Рассмотрим множество *X* = *{а, Ь, с).* Тогда все упорядоченные и неупорядоченные выборки объемом два выглядят следующим образом:

- • размещения с повторениями *{аа, ab, ас, ba, bb, be, са, cb, сс}, А:* = 9;
- • размещения без повторений *{ab, ас, ba, be, са, cb*}, *А*™ = *6;*
- • сочетания с повторениями *{аа, ab, ас, bb, be, сс}, С*™ = 6;
- • сочетания без повторений *{ab, ас, be), С*™ = 3.

По определению перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же л различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок
P_n = *п,* (1.18)
где л! = 1 • 2 • 3 • • л.
Заметим, что по определению 0! = 1.
Перестановка л-элементного множества *X* — это взаимно однозначная функция/: *X*—» *X*. Если для простоты принять *X*- {1,..., л}, то перестановкой можно назвать упорядоченный набор из л различных чисел, лежащих в промежутке от 1 до л (далее будет рассматриваться именно этот случай).
Рассмотрим несколько задач на перестановки элементов множества.
Задача 1.14
В слове МИФИ меняют местами буквы. Чему равно количество всех возможных различных слов?
Решение.
Две буквы в слове совпадают, следовательно, число всех различных перестановок в 2! меньше возможных, т.е. равно
Задача 1.15
В слове НИЯУ МИФИ меняют местами буквы и пробел. Чему равно количество всех возможных различных слов?
Решение.
Три буквы в слове совпадают, следовательно, число всех различных перестановок в 3! меньше возможных, т.е. равно
= 60 480.

- 9-8-7-6-5-4-3-21
- 3!

Размещениями называют комбинации, составленные из *п* различных элементов по *т* элементов, лежащих в промежутке от 1 до *п,* которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Другими словами, размещение — это множество с повторениями. Обозначим число его элементов через *А*™.
Число всех возможных размещений
А™ = *n(n-)(n-2)...(n-m+* 1). (1.19)

Теорема 1.6. Число размещений

Число упорядоченных m-элементных подмножеств множества X_n, содержащего n элементов, равно

А™ =——. (1.20)

(n - m)

Сочетание из *n* элементов по *m* — это неупорядоченный набор (множество) из *m* различных чисел, принадлежащих множеству *X*. Таким образом, *сочетаниями* называют комбинации, составленные из *n* различных элементов по *m* элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Так как сочетание является неупорядоченным набором, то каждому такому набору соответствует *m* размещений (т.е. упорядоченных наборов тех же элементов).

Теорема 1.7. Число сочетаний *Число неупорядоченных m-элементных подмножеств множества X_n, содержащего n элементов, равно*	
И * ?-т/7? _ *m(n - m)*	(1.21)
Можно привести некоторые свойства сочетаний:	
i /~<*m* _ *n-m*. А/ "-'*n* — *n* '	(1.22)
/-im , */~<m+* _ *tim+I.*	(1.23)
о *к* _ */~ik* *Э)* ^*n* * .	(1.24)

Эти свойства следуют из самих определений и проверяются непосредственно подстановкой.

Рассмотрим несколько задач на размещение и сочетания.

Задача 1.16

Чему равно количество всех возможных различных слов, составленных из трех различных букв множества {А, В, С, Д ?}?

Решение.

Все буквы в слове не совпадают, следовательно, число всех различных размещений $A^3 5$, равно *AI* = 5*4* = 60.

Задача 1.17

В слове ПИРАТ выбирают две буквы. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

Так как порядок букв в данном случае не имеет значения, то результат определяется по формуле для числа сочетаний:

- 5!
- 2!(5 - 2)!

Задача 1.18

Определить, сколько существует различных способов выбора (*порядок не имеет значения)* 3 *томов из 5-томного собрания сочинений А.П. Чехова.*

Решение.

Результат определяется по формуле для числа сочетаний:

- 5!
- 2!(5 — 2)!

Задача 1.19

В слове СКАНЕР выбирают по две буквы (все буквы различны) и составляют из них слова. Сколькими способами это можно сделать? *Решение.*
Используя формулу размещения, получаем
A} = 6-5 = 30.
Задача 1.20
В слове НИЯУ МИФИ выбирают по две буквы (все буквы различны) и составляют из них слова. Сколькими способами это можно сделать ?
Решение.
Используя формулу размещения, получаем
A] = 6-5 = 30.
Теорема 1.8. Количество перестановок с повторениями
Количество перестановок n элементов, из которых n_x относятся к типу 1, n_2 *относится к типу* 3, *и т.д., вплоть до $n_г$ элементов типа г, равно*
Pn = , "] ,• 0-25)
$n_x n_2 \dots n_г$

Правило суммы и произведения

Решение большинства задач в комбинаторике основано на применении двух основных правил – правила суммы и правила произведения.
Рассмотрим следующие задачи.
Задача 1. В отделе «Игрушки» имеются 4 вида кукол и 3 вида посудных наборов. Сколькими способами можно выбрать одну игрушку для девочки?
Задача 2. В вазе для фруктов лежат 8 слив и 6 абрикосов. Сколькими способами можно выбрать один плод?
Эти задачи можно перевести на язык теории множеств и сформулировать в общем виде:
Имеются два конечных множества A = $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и B = $\{b_1, b_2, \dots b_m\}$, не имеющих общих элементов. Сколькими способами можно выбрать объект, принадлежащий либо A, либо B?
Так как $A \cap B = \varnothing$, то $\{x \mid x \in A \vee x \in B\} = A \cup B$, а тогда $m(A \cup B) = m(A) + m(B) = n + m$
Это утверждение в комбинаторике называют правилом суммы.
Правило суммы. Если элемент *a* можно выбрать *n* способами, а элемент *b – m* способами, причем ни один из способов выбора элемента *a* на совпадает со способом выбора элемента *b*, то выбор «либо *a*, либо *b*», можно осуществить
n + m способами.
Правило суммы легко распространяется на тот случай, когда число попарно непересекающихся множеств более двух. Используя правило суммы, легко решить рассмотренные выше задачи.

1. Поскольку имеется 4 вида кукол, то существует 4 способа выбрать одну из них. Аналогично, существует 3 способа выбрать один посудный набор. По правилу суммы выбрать «либо куклу, либо набор посуды» можно (4+3=7) 7-ю способами.
2. По правилу суммы существует 8+6=14 способов выбрать один плод.

Далее рассмотрим следующие задачи.
Задача 3. В меню столовой 4 вида первых блюд и 6 видов вторых. Сколькими способами можно выбрать обед, состоящий из одного первого и одного второго блюд?
Задача 4. Сколькими способами можно составить команду из одного юноши и одной девушки для участия в соревнованиях по шахматам, если в группе 5 шахматистов и 3 шахматистки?
Решение этих задач сводится к подсчету числа упорядоченных пар, когда известно число способов выбора первой компоненты и второй.
Пусть имеем множество A = $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и B = $\{b_1, b_2, \dots b_m\}$. Множества всех упорядоченных пар, составленных из элементов *A* и *B* образует декартово произведение этих множеств.
Известно, что
$m(A \times B) = m(A) \cdot m(B) = n \cdot m$
В комбинаторике это утверждение называют правилом произведения.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать n способами, и если после каждого такого выбора элемент b можно выбрать m способами, то выбор упорядоченной пары (а, в), то есть выбор «и a, и b» можно осуществить $n \cdot m$ способами.
Правило произведения легко распространяется на случай выбора кортежа любой конечной длины.
Используя правило произведения, решим рассмотренные задачи.

1. Поскольку существует 4 способа выбрать первое блюдо и 6 способов выбрать второе блюдо, то по правилу произведения выбор «первое и второе» можно осуществить ($4 \cdot 6 = 24$) 24-мя способами.
2. Аналогично, существует 15 способов составить команду для участия в соревнованиях по шахматам.

Перестановки без повторений

Пусть имеем множество M, состоящее из n элементов любой природы. Упорядочим это множество, пронумеровав его элементы. Получим кортеж длины n с попарно различными элементами, который называют перестановкой из n элементов.
Определение. Всякое упорядоченное n- элементное множество называется перестановкой из n элементов.
Одно и то же множество можно упорядочить разными способами. Например, множество студентов группы можно упорядочить по возрасту, по росту, алфавиту, успеваемости и так далее. Естественно поставить вопрос:
Сколькими способами можно упорядочить множество M, содержащее n элементов?
Ответ на этот вопрос сводится к решению следующей комбинаторной задачи: определить число всех возможных перестановок из n элементов. Обозначают число всех возможных перестановок из n элементов символом P_n.
Если множество $\{a, b\}$ состоит из двух элементов, то очевидно, что упорядочить его можно двумя способами: $\{a, b\}$ и $\{b, a\}$, то есть $P_2=2$.
Если же множество $\{a, b, c\}$ состоит из трех элементов, то упорядочить его можно шестью способами. Действительно, существует 3 способа выбрать элемент на первое место, после этого существует два способа выбрать элемент на второе место и один способ – на третье место. Всего по правилу произведения существует $3 \cdot 2 \cdot 1$ способов упорядочить множество $\{a, b, c\}$, то есть $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Выписывая всевозможные перестановки из элементов этого множества, легко убедиться в справедливости проведенных рассуждений.
В общем случае справедлива следующая теорема.
Теорема. Число различных перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно, то есть $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ (читается «н-факториал», $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)
Задача. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, если ни одна цифра в записи числа не повторяется дважды?
Решение. По формуле $Pn = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ Число всех возможных перестановок из пяти цифр равно $P5=5!$ А поскольку цифра нуль не может занимать первое место, то искомое число есть: $P5 – P4 = 5! – 4! = 120 – 24 = 96$.

Размещения без повторений

Рассмотрим комбинаторную задачу, связанную с выбором упорядоченных подмножеств некоторого конечного множества. Общая формулировка этой задачи такова:
Имеется множество, состоящее из n элементов. Сколько можно составить упорядоченных подмножеств, содержащих k его элементов?
Определение. Всякое упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества ($k \le n$) называется *размещением* из n элементов по k.

Как следует из определения, два размещения считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом или состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.

Число различных размещений из *n* элементов по *k* элементов обозначают символом .
Справедлива следующая теорема.
Теорема. Число различных размещений из *n* элементов по *k* элементов равно произведению *k* последовательных натуральных чисел, наибольшим из которых является *n*, то есть

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \text{ или}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \; (*)$$

Задача. Сколькими способами можно разделить 5 путевок в различные дома отдыха, если отдохнуть желают 12 человек?
Решение
Поскольку из 12 человек нужно выбрать 5, а затем разделить между ними различные путевки, то искомое число способов определяется по формуле (*).

$$A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 95040$$

Есть ли у нуля факториал
Как вы думаете, сколькими способами можно выбрать 0 объектов из *n* имеющихся, или, другими словами, не выбрать ни одного объекта? Вопрос странный, но если записать формально, то получим:

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

В общем-то, это логично: есть единственный способ не выбрать ни одного объекта из *n* имеющихся – ничего не делать.
Второй вопрос: сколькими способами можно сделать упорядоченный выбор из n объектов всех n объектов? Поступим так: выбираем любой объект, рядом с ним размещаем второй, потом третий и т.д. Получается обыкновенная перестановка всех *n* объектов, и число таких перестановок $P_n = n!$. С другой стороны, согласно найденной формуле, это же число равняется

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

Появилось новое выражение 0! (факториал мы определили только для натуральных чисел). Предположим, что 0! – это какое-то неизвестное число, и найдем его из равенства $A_n^n = P_n$.
Тогда $\frac{n!}{0!} = n!$, откуда 0! = 1, то есть факториал нуля равен единице. Факториал нуля часто возникает в разных комбинаторных задачах, но везде и всегда его принимают равным единице.

Сочетания без повторений

При составлении *k*-элементных подмножеств n-элементного множества нас не всегда интересует порядок, в котором располагаются элементы. Например, если имеется 10 сортов ткани и нужно выбрать 4 сорта, то порядок, в котором выбирались сорта, значения не имеет. В таких задачах речь идет о подмножествах, не являющихся упорядоченными.
Определение. Всякое *k*-элементное подмножество *n*-элементного множества ($k \leq n$) называется сочетанием из *n* элементов по *k*.
Два сочетания считаются различными, если они отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Порядок элементов в сочетании значения не имеет.
Число различных сочетаний из *n* элементов по *k* находится по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Задача. Из группы студентов, насчитывающей 25 человек, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 метров. Сколькими способами можно это сделать?
Решение. Выбор участников в беге на 1000 метров можно осуществить $C_{25}^4 = \frac{25!}{4!(25-4)!}$=12550 способами, так как порядок участников в этом случае не имеет значения.
Сколькими способами можно составить команду для участия в эстафете 100+200+300+400?
Выбор участников эстафеты можно осуществить $A_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)!}$=303600 способами, так как в этом случае участников команды расставляют в определенном порядке.

Простейшие свойства числа сочетаний

1. $(\forall k,\ n \in N_2,\ 0 \le k \le n)(C_n^k = C_n^{n-k})$
2. $(\forall k,\ n \in N_2,\ 0 \le k \le n)(C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k)$

Надо отметить, что $C_n^0 = 1$, так как 0! = 1.
Свойство 2 позволяет вычислять значенияC_n^k, знаяC_{n-1}^{k-1} иC_{n-1}^k . Пользуясь этим свойством, можно последовательно вычислить C_n^k сначала при n=0, затем при n=1, при n=2 и так далее.
Вычисления удобно располагать в виде следующей треугольной таблицы.
C_0^0
$C_1^0 C_1^1$
$C_2^0 C_2^1 C_2^2$
$C_3^0 C_3^1 C_3^3 C_3^3$
$C_4^0 C_4^1 C_4^2 C_4^3 C_4^4$
$C_5^0 C_5^1 5 C_5^2 C_5^3 C_5^5$
… … … … ... … …

В (n + 1)-ой строке по порядку записаны числаC_n^0, C_n^1 , C_n^2…, C_n^n. Очевидно, что каждое число C_n^k, равно сумме двух чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от него.
Таким образом, указанную таблицу легко запомнить и восстановить, не пользуясь формулой числа сочетаний.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Рассмотренная треугольная таблица носит название треугольника Паскаля. Последнее название исторически неточно, так как такой таблицей пользовался еще персидский математик Омар Хайям (1048 – ок. 1131).

Перестановки с повторениями

В практике решения задач часто встречаются перестановки, в которых элементы повторяются.
Если среди переставляемых элементов есть одинаковые, то перестановок получается меньше, так как некоторые перестановки совпадают друг с другом.
Например, переставляя буквы слова «ОНА», мы получим 6 различных перестановок:
ОНА НОА ОАН
АНО НАО АОН
Если теперь вместо слова «ОНА» взять слово «ОНО» и во всех выписанных перестановках букву «А» заменить буквой «О», то окажется, что некоторые перестановки будут одинаковыми. А

именно, мы получим, что число различных перестановок из букв слова «ОНО» будет равно 6 : 2 = 3.
В общем виде задача формулируется так:
Имеются элементы k различных типов: *a, b, ..., l*. Определить число всех возможных перестановок из этих элементов, если элемент *a* повторяется n_1 раз, элемент *b* – n_2 раз и так далее, элемент *l* – n_k раз.

Определение. Перестановкой с повторениями из элементов *a, b, ..., l*, в которой эти элементы повторяются соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ раз, называется кортеж длины $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, среди компонент которого *a* встречается n_1 раз, *b* – n_2 раз и так далее, *l* – n_k раз.
Обозначают число перестановок с повторениями символом $P_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$
Теорема. Число различных перестановок с повторениями из элементов *a, b, ..., l*, в которых эти элементы повторяются соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ раз, определяется по формуле

$$P_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_k)!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_k!}$$

*Задача***.** Сколько восьмизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 3, 5 при условии, что цифра 1 повторяется в каждом числе четыре раза, цифры 3 и 5 – по 2 раза?
Решение. Искомое число является числом различных перестановок с повторениями из цифр 1, 3, 5, в которых цифра 1 повторяется четыре раза, а цифры 3 и 5 – по два раза. Поэтому по выше указанной формуле имеем:

$$P_{(4,2,2)} = \frac{8!}{4!\, 2!\, 2!} = 420$$

Размещения с повторениями
Пусть имеем множество *M*, состоящее из *n* элементов любой природы. Необязательно $k \le n$
Определение. Кортеж длины *k*, составленный из элементов *n*-элементного множества, называется размещением с повторениями из *n* элементов по *k*.

Число различных размещений с повторениями из *n* элементов по *k* определяется по формуле $\overline{A_n^k = n^k}$.
Задача. На диск секретного замка нанесены 10 цифр, шифр состоит из 4 цифр. Сколько неудачных попыток может сделать человек, не знающий шифра?
Решение. По приведенной выше формуле общее число комбинаций равно $10^4 = 10000$. Значит наибольшее число неудачных попыток – 9999.

Число подмножеств конечного множества.
Пусть *M* – конечное множество. Как каждое множество, *M* имеет подмножества. В некоторых случаях приходится говорить не об отдельных подмножествах множества *M*, а о множестве всех его подмножеств. Множество всех подмножеств множества *M* называется множеством-степенью множества *M* и обозначается символом *P(M)*. Например,
если $M=\varnothing$, то $P(M) = \{\varnothing\}$;
если $M=\{a\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}\}$;
если $M=\{a, b\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$;
если $M=\{a, b, c\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\},\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Справедлива теорема: если множество *M* содержит *n* элементов, то число всех подмножеств этого множества равно 2^n.

Сочетания с повторениями

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу.

Задача. В почтовом отделении продаются открытки 4-х видов. Сколькими способами можно купить здесь 9 открыток?

Так как порядок, в котором выбираются открытки, не является существенным, то эта задача будет ближе к задачам на сочетания, но в этих сочетаниях элементы могут повторяться. Такие задачи называются задачами на сочетания с повторениями.

Общая формулировка этих задач такова:

Имеются элементы n различных типов. Сколько совокупностей, содержащих по k элементов каждая, можно составить из них, если не принимать во внимание порядок элементов в совокупности?

Определение. Сочетанием с повторениями из данных n различных типов элементов по k элементов называется всякая совокупность, содержащая k элементов, каждый из которых является одним из элементов указанных типов.

Число различных сочетаний с повторениями из n типов элементов по k элементов определяется по формуле $\overline{C_n^k} == \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = C^k_{n=+k-1}$

Применим эту формулу к решению приведенной выше задачи. Очевидно, что число способов купить открытки равно числу различных сочетаний с повторениями из 4 элементов по 9, то есть:

$$\overline{C_4^9} = C^9_{4+9-1} = \frac{(4+9-1)!}{9!\,(4-1)!} = \frac{12!}{9!\,3!} = 220$$

Решение комбинаторных задач

При решении конкретной комбинаторной задачи надо сначала выяснить, не решается ли она непосредственно применением правил суммы и произведения. Если такое решение окажется затруднительным, то следует составить математическую схему решаемой задачи, выяснив, идет ли в ней речь о составлении подмножеств или кортежей, допустимы или нет повторения.

Приведем примеры решения комбинаторных задач.

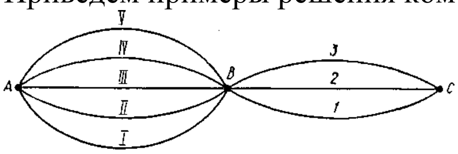


Рис. 1

1. *Из города A в город B ведут пять дорог, а из города B в город C – три дороги. Сколько путей, проходящих через B, ведут из* A в C?

Каждый путь искомого вида задается парой *(a, b),* где *a* – один из путей, соединяющих *A* и *B*, a b – один из путей, соединяющих *B* и C. Так как по условию *a* можно выбрать пятью способами, а *b* – тремя способами, то пару *(a, b)* можно по правилу произведения выбрать 5 · 3 = 15 способами.

Решение задачи может быть более наглядным, если составить схему, изображенную на рисунке 1. Здесь римские цифры – номера путей из *A* в *B,* а арабские – номера путей из *B* в *C.*

2. *Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «полка»?*

В этом слове две гласные буквы и три согласные. По правилу произведения выбор может быть сделан 2 · 3 = 6 способами.

3. *Имеется* 6 *пар перчаток различных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну перчатку на правую руку так, чтобы эти перчатки были различных размеров?*

Эту задачу тоже можно решить по правилу произведения. Перчатка на левую руку может быть выбрана шестью способами. После того как она выбрана, перчатку на правую руку можно выбрать лишь пятью способами (размеры перчаток должны быть разными). Поэтому всего имеем 6 · 5 = 30 способов выбора.

Другой способ решения этой задачи основан на формуле для размещений без повторений. Каждый выбор можно задать парой различных чисел *(a, b)*, где $1 \le a \le 6$,$1 \le b \le 6$. Число таких пар равно $A_6^2 = 6 \cdot 5$ = 30.

4. *Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различных цветов, если имеется материал пяти различных цветов?*
Обозначим пять имеющихся цветов буквами *a, b, c, d, e.* Тогда любой флаг «зашифровывается» кортежем из трех различных букв. Поэтому число флагов равно числу размещений без повторений из 5 по 3, т. е. $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3$= 60.

5. *Сколькими способами можно составить четырехцветный флаг из горизонтальных полос, имея четыре различных цвета?*
В этом случае различные флаги отличаются друг от друга лишь порядком цветов. Их число равно числу перестановок из четырех элементов, т. е. P_4 = 4! = 24.

6. *Из колоды, содержащей* 52 *карты, вынули* 10 *карт. Сколькими различными способами это можно сделать? В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? В скольких случаях окажется ровно один туз? В скольких случаях — ровно* 4 *туза?*
Каждый выбор карт из колоды есть выбор 10-множества из 52-множества. Это может быть сделано

$$C_{52}^{10} = \frac{52!}{10!\,42!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

способами.
Найти число способов, когда среди выбранных карт есть хотя бы один туз, на первый взгляд сложнее — надо разбирать случаи, когда есть ровно один туз, ровно два туза, ровно три туза, ровно четыре туза. Но проще найти сначала, в скольких случаях среди выбранных карт нет ни одного туза — во всех остальных случаях будет хотя бы один туз. Но если среди выбранных карт нет ни одного туза, то выбор совершался не из 52, а из 48 карт (всех карт, кроме тузов), а потому число таких выборов равно C_{48}^{10}. Следовательно, хотя бы один туз будет в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$случаях.
Чтобы найти, в скольких случаях будет ровно один туз, разобьем операцию выбора карт на две — сначала выбирают из четырех тузов один туз — это можно сделать способамиC_4^1. А потом из оставшихся 48 карт выберем 9, что можно сделатьC_{48}^9. способами. По правилу произведения получаем, что весь выбор можно сделать $C_4^1. \cdot C_{48}^9$. способами.
Наконец, выбор, содержащий четыре туза, можно сделатьC_{48}^6. способами — надо взять 4 туза и выбрать еще 6 карт из 48.

7. *В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства* (наибольшее число зубов равно 32)?
Каждому жителю государства соответствует подмножество множества *X*, состоящего из 32 зубов, показывающее, каков набор зубов у этого жителя. Общее число подмножеств 32-множества равно 2^{32}. Значит, в государстве не может быть больше, чем 2^{32} жителей.

8. *Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?*
В этом задаче надо найти число кортежей длины 8, имеющих заданным состав (2, 2, 2, 1, 1). Число таких кортежем (то есть перестановок с повторениями) равно:

$$P(2,2,2,1,1) = \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 5040$$

9. *Пятнадцать занумерованных биллиардных шаров разложены по шести лузам. Сколькими способами это можно сделать?*
Поставим каждому числу от 1 до 15 в соответствие номер лузы, в которую положен шар, номер шара равен этому числу. Получим кортеж длины 15, составленный из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (номеров луз). Число таких кортежей равно 6^{15}.

11. *Сколькими способами можно расставить на* 32 *черных полях шахматной доски* 12 *белых и* 12 *черных шашек?*
Поля для белых шашек можно выбрать C_{32}^{12}способами. После этого остается 20 полей, из

которых можно способами выбрать поля для черных шашек. Всего получаем
$C_{32}^{12} \cdot C_{20}^{12} = \frac{32!}{12! \cdot 20!} \cdot \frac{20!}{12! \cdot 8!} = \frac{32!}{12! \cdot 12! \cdot 8!}$способов.

12. *Сколькими способами можно составить набор из* 8 *пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?*
Поскольку в этой задаче порядок пирожных не играет роли, то каждый набор задается кортежем длины 8 из 4 элементов (названий сортов пирожных), причем порядок компонент кортежа не играет роли. Иными словами, нам надо найти число различных составов таких кортежей. А это число равно числу сочетаний с повторениями из 4 элементов по 8, т. е. $C_{11}^{8} = 165$. Значит, существует 165 различных наборов.

Задания для практического занятия:

1. Вычислить: а) $\frac{6!-5!}{4!}$; б) $\frac{6!}{3!+4!}$; в)$\frac{4!6!}{8!}$.
2. Вычислить: а)$\frac{P_{20}}{P_5 \cdot P_{15}}$; б) $\frac{P_5 \cdot P_4}{P_8 \cdot P_2}$.
3. Сколькими способами можно расставить 6 книг на полке?
4. Из 6 книг надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?
5. Сколькими способами можно разместить 6 детей на 6-местной карусели с неразличимыми местами?
6. В шахматном турнире принимали участие 15 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий сыграно в турнире?
7. Сколькими способами можно выставить дозор из трех солдат и одного офицера, если есть 80 солдат и три офицера?
8. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами им могут быть поставлены оценки, если известно, что ни один из них не получит «неудовлетворительно»?
9. Из студенческой группы в 20 человек нужно выбрать двух представителей в студенческий совет. Сколькими способами это можно сделать?
10. Сколькими способами можно разместить *n* человек на *k* стульях, если:
    а) $n = k = 15;$
    б) $n = 15, k = 10$
11. Сколькими способами можно из 25 различных роз выбрать 3 розы для букета?
12. Сколькими способами можно из 25 видов роз выбрать 3 розы для букета (имеется достаточное количество роз каждого вида)?
13. Сколькими способами можно 25 роз, среди которых 8 красных, 10 розовых и 7 желтых, подарить по одной 25 призерам конкурса?
14. Сколькими способами можно составить четырехцветный флаг из горизонтальных полос, имея четыре различных цвета?
15. Из колоды, содержащей 36 карт, вынули 10 карт. Сколькими различными способами это можно сделать?
16. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?
17. Сколько существует двузначных чисел, которые записываются различными цифрами?
18. Сколько различных трехзначных чисел можно записать, не пользуясь цифрой 0?
19. Сколькими различными способами можно построить в шеренгу 5 человек?
20. Сколькими способами можно расставить на первой линии шахматной доски 6 белых пешек и 2 черных?
21. Сколькими способами можно выбрать из 30 учеников трех дежурных?
22. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «математика»? В слове «кукуруза»? В слове «молоко»? (под словом будем понимать любой набор букв).

23. Сколько различных четырехзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 2?
24. Автомобильные номера состоят из трех букв и трех цифр. Сколько таких номеров можно составить, если используются 28 букв русского алфавита?

Контрольные вопросы

1. Что такое n факториал? Его обозначение.
2. Дайте определение размещения и запишите формулу размещения из n элементов по m элементов.
3. Дайте определение перестановки и запишите формулу перестановки из n различных элементов.
4. Дайте определение сочетания и запишите формулы сочетания из n элементов по m элементов.

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Тема 4.3. Вероятность

Практическое занятие № 11. Вычисление вероятности события
количество часов 1

Цель: закрепить умения вычислять вероятности событий, решая прикладные задачи.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Теоретический материал

Теория вероятностей — математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений (событий). Случайным событием (или просто событием) называется всякое явление, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенной совокупности условий.

Классическое определение вероятности

Вероятностью P(A) события называется отношение m числа исходов опыта, благоприятствующих событию A, к общему числу n возможных исходов опыта:P (A) = $\frac{m}{n}$

Задача 1. В лотерее из 1000 билетов имеются 200 выигрышных. Вынимают наугад один билет. Чему равна вероятность того, что этот билет выигрышный?

Решение. Общее число различных исходов есть n=1000. Число исходов, благоприятствующих получению выигрыша, составляет m=200. Согласно формуле, получим

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{200}{1000} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Дискретные случайные величины можно задать таблицей вида:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Здесь буквой X обозначена случайная величина, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – перечень всех ее возможных значений, а $p_1, \ldots, p_n$ – соответствующие им вероятности. Такую таблицу называют законом распределения дискретной случайной величины.

События $X=x_i$, ($i=1, 2, ,3, \ldots, n$) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=1$.

Пример 1.Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение: искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать значения: 0, 5, 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – 2 случая и третьему – 1 случай. Найдем их вероятности:

$$P(x_1)=47/50=0{,}94;\ P(x_2)=2/50=0{,}04;\ P(x_3)=1/50=0{,}02.$$

Тогда закон распределения случайной величины имеет вид:

X_i	0	5	30
p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $p_1+p_2+p_3=0{,}94+0{,}04+0{,}02=1$.

Статистика — отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых статистических (количественных, качественных) данных. Всю совокупность объектов, подлежащих изучению, называют **генеральной совокупностью**. Та часть объектов, которая попала на проверку, исследование и т.п., называется выборочной совокупностью или просто **выборкой**. Выборки характеризуются центральными тенденциями: **средним значением, модой и медианой**. Средним значением выборки называют среднее арифметическое всех её значений. **Среднеарифметическим значением** вариационного ряда называется результат деления суммы значений статистической переменной на число этих значений, то есть на число слагаемых.

Мода выборки – те её значения, которые встречаются чаще всего. Медиана выборки – это число, “разделяющее” пополам упорядоченную совокупность всех значений выборки.

Задача

Дана выборка: 1,3; 1,8; 1,2; 3,0; 2,1; 5; 2,4; 1,2; 3,2;1,2; 4; 2,4.
Это ряд вариантов. Расположив эти варианты в возрастающем порядке, мы получим вариационный ряд: 1,2; 1,2; 1,2; 1,3; 1,8; 2,1; 2,4; 2,4; 3,0; 3,2; 4; 5.
Среднеарифметическое значение этого ряда равно $\frac{1{,}2*3+1{,}3+1{,}8+2{,}1+2{,}4*2+3{,}0+3{,}2+4+5}{12}=2{,}4$.
Медиана ряда -2,4
Мода ряда –1,2.

Медианой вариационного ряда называется то значение случайной величины, которое приходится на средину вариационного ряда (Ме).

Медианой упорядоченного ряда чисел с нечетным числом членов называется число, записанное посередине, а медианой упорядоченного ряда чисел с четным числом членов называется среднее арифметическое двух чисел, записанных посередине.

Модой вариационного ряда называют вариант (значение случайной величины), которому соответствует наибольшая частота (Мо), т.е. которая встречается чаще других.

Размахом ряда называется разность между R= x_{max} - x_{min}, т.е. наибольшим и наименьшим значениями этих вариантов. Составим таблицу

x_i	1,2	1,3	1,8	2,1	2,4	3,0	3,2	4	5
n_i	3	1	1	1	2	1	1	1	1
$n_{i/n}$	3/12=1/4	1/12	1/12	1/12	2/12	1/12	1/12	1/12	1/12

Такие таблицы называют частотными. В них числа второй строки – частоты; они показывают, как часто встречаются в выборке те или другие её значения. В третьей строке стоят относительные частоты.

Относительной частотой значений выборки называют отношение её частоты к числу всех значений выборки.

Найдём размах ряда: R=5-1,2=3,8; Размах ряда равен 3,8.

В статистике широкое применение находят такие характеристики, как мода и медиана.

Мода является наиболее приемлемым показателем при выявлении расфасовки некоторого товара, которой отдают предпочтение покупатели; цены на товар данного вида, распространённый на рынке; как размер обуви, одежды, пользующийся наибольшим спросом; вид спорта, которым предпочитают заниматься большинство населения страны, города, посёлка школы и т.д.

Задания для практического занятия:

1.В ящике из 1000 деталей имеются 20 бракованных. Вынимают наугад 1деталь. Чему равна вероятность того, что деталь небракованная?

2.На отдельно взятых карточках написаны буквы ***ц, о, н, а, к, е.*** Карточки перемешали. После перемешивания берут карточки по одной и кладут рядом. Какова вероятность получить слово «***оценка***»?

3. Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального тетраэдра при одном подбрасывании.

4. Найти моду выборки 4, 15, 6, 7, 3, 6,8

5. Найти медиану и среднее значение выборки, размах ряда, предварительно составив таблицу с частотами появления варианты 17,12, 12, 34, 18, 5, 17, 12, 18, 15

Контрольные вопросы

1. Что понимают под случайным событием?
2. Перечислите виды событий.
3. Чему равно достоверное событие?
4. Как условно обозначается невозможное событие?
5. Как вычисляется вероятность элементарного события?
6. В каких случаях применяют геометрические вероятности?

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Тема 4.4. Графы

Практическое занятие №12. Решение транспортных задач с использованием графов

количество часов 1

Цель: формирование навыков составления математических моделей транспортных задач; формирование навыков оптимизации опорных планов транспортных задач;

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Существует несколько методов решения транспортной задачи. Мы будем подробно рассматривать два из них:

- решение транспортной задачи методом потенциалов.
- решение транспортной задачи с использованием симплекс метода.

Решение задачи методом потенциалов происходит в несколько этапов:

1. Определение опорного решения.
2. Применение к найденному опорному решению самого метода потенциалов.
3. Проверка единственности решения.

Определение опорного плана, в свою очередь, можно выполнить несколькими способами. Мы рассмотрим два из них:

- метод северо-западного угла
- метод минимальных стоимостей

(не путать с методами решения самой транспортной задачи!!!)

О чем говорится в определении транспортной задачи?

У нас есть некоторый груз, который находится на складах: склад 1, склад 2, ..., склад - это пункты отправления.

Этот груз нам необходимо развести по магазинам: магазин 1, магазин 2, ..., магазин k - это пункты назначения.

Нам выгоднее как можно эффективнее выполнить работу, т.е. найти такой вариант перевозки, при котором затраты будут минимальными.

Рассмотрим пример решения транспортной задачи подробно.

Транспортная задача задается следующей таблицей:

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Далее, что означают числа в условии транспортной задачи?

Что означают числа в условии транспортной задачи?

Рассмотрим постановку транспортной задачи, т.е. что дано в условии и переведем ее с математического языка на язык, понятный нам.

Это наши "склады" - пункты отправления: два склада с товаром: A_1 и A_2

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Это объем товара - количество груза, соответственно на складах A_1 и A_2:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Далее имеем дело с пунктами назначения - с "магазинами". В нашем случае их 4 штуки: B_1, B_2, B_3 и B_4.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

И соответственно потребности каждого из магазинов - потребности пунктов назначения:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Числа внутри таблицы - матрица стоимостей, или по другому, расценки перевозки 1 единицы груза из соответствующих пунктов. Эти значения также могут интерпритироваться как расстояния между соответствующими пунктами. Подробности — в условии решаемой задачи.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Например, для перевозки 1 единицы груза из пункта отправления ("склада") A_2 в пункт назначения ("магазин") B_3 надо заплатить 4 условные единицы стоимости, например 4 руб.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Аналогично, мы заплатим 6 рублей за перевозку 1 единицы груза из "склада" A_1 в "магазин" B_4.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Или та же самая задача может быть задана сразу в более понятном виде:

Пункты отправления	Пункты назначения				
	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	4	3	5	6	100
A2	8	2	4	7	200
Потребности	50	100	75	75	

Возможна текстовая постановка задачи. В этом случае необходимо самим заполнять все ячейки таблицы, исходя из заданных в условии значений.

Далее - Методы определения первоначального плана транспортной задачи.

Методы определения первоначального плана транспортной задачи.

Рассмотрим самый распространенный метод получения опорного плана - метод северо-западного угла.

Называется он так потому, что заполнение таблицы начинается с самой верхней левой (северо-западной) ячейки.

Перед тем, как распределять ресурсы по "магазинам", проверим, равны ли общие потребности имеющимся ресурсам?

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200		2	4	7

Потребности: 50 + 100 + 75 + 75 = 300

Ресурсы: 100 + 200 = 300

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2	4	7

Потребности = Ресурсам

В этом случае говорят, что транспортная задача закрытая. Решение открытой транспортной задачи рассмотрим чуть позже.

Начнем нахождение опорного решения:

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	✔			
A_2	200				

Заполним клетку (1;1).

В магазин B_1 требуется 50 единиц товара. Со склада A_1 отправим в этот магазин 50 единиц. Потребности магазина B_1 выполнены, следовательно, нет необходимости везти туда груз со склада A_2.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50			
A_2	200	–			

На складе A_1 еще осталось 50 единиц груза. Эти остатки можем направить в магазин B_2. Ресурсы склада A_1 исчерпаны.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–			

Переходим к складу A_2.

Так как потребности магазина B_1 выполнены полностью, рассмотрим магазин B_2, которому требуется 100-50=50 единиц товара. Направим их туда.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50		

Заметим, на складе A_2 осталось еще 200-50=150 единиц груза, которые мы распределим по магазинам B_3 и B_4, полностью удовлетворяя и их потребности.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50	75	75

Склады пусты!

Потребности магазинов в товаре полностью выполнены!

Получен опорный (первоначальный) план транспортной задачи.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50	75	75

Рассмотрели северо-западный метод построения первоначального плана (опорного решения).

Далее опишем метод минимальных стоимостей получения опорного плана.

Метод минимальных стоимостей получения опорного плана

Суть метода состоим в том, чтобы в первую очередь направлять груз в те пункты, где "расценки" в матрице стоимостей минимальны. Если клеток с наименьшими тарифами несколько, то заполняется любая из них.

		B_1 50	B_2 100	B_3 75	B_4 75
A_1	100	4	3	5	6
A_2	200	8	2 ✔	4	7

Направляем 100 единиц груза из склада A_2 в магазин B_2.

Остатки на складе A_2 — 100 единиц. Потребности магазина B_2 выполнены.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100		–		
A_2	200		100		

Груз со склада A_2 отправим в магазин, у которого стоимость перевозки ниже — магазин B_3, так как мин(4;7)=4

Размер поставки равен потребности магазина — 75. Остатки со склада 200-100-75=25 перенесем в магазин B_4.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100		–	–	
A_2	200		100	75	25

Остается только раскидать груз со склада A_1 по магазинам: B_1 — 50 единиц, B_4 — 75-25=50 единиц.

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	50	–	–	50
A_2	200		100	75	25

Получили два опорных плана: методом северо-западного угла и методом минимальных стоимостей.

Первый опорный план (по методу северо-западного угла):

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	50	50	–	–
A_2	200	–	50	75	75

Второй опорный план (по методу минимальных стоимостей):

		B_1	B_2	B_3	B_4
		50	100	75	75
A_1	100	50	–	–	50
A_2	200		100	75	25

Далее проверим правильность вычисления первоначального плана.

Проверка правильности вычисления первоначального плана

Перед тем как перейти к дальнейшему решению задачи проверим условие:

Правило:

Количество заполненных клеток (базисных клеток) в первоначальном плане ВСЕГДА должно быть равно m + n - 1, где m - количество строк, n - количество столбцов

В нашем случае условие выполняется: 2 + 4 - 1 = 5

Что же делать, если количество заполненных ячеек меньше необходимого?

Подробно об этом с разбором примеров в статье Вырожденность опорного плана транспортной задачи. Как избавиться?

Во избежании случайных вычислительных ошибок проверим, равны ли суммарные значения каждой строки и каждого столбца соответствующим значениям условия.

			B1 50	B2 100	B3 75	B4 75
A1	100	=	50			50
A2	200	=		100	75	25

100 = 50 + 50
200 = 100 + 75 + 25
По столбцам:

		B1 50	B2 100	B3 75	B4 75
A1	100	50			50
A2	200		100	75	25

Видим, суммарные значения элементов каждого столбца равны соответствующим потребностям магазинов.
Несмотря на то, что опорные планы разные, оба приведут к одному оптимальному решению или же к решениям, имеющим одну стоимость перевозки.
Далее применим метод потенциалов к обоим опорным планам и сравним получившиеся ответы.

Метод потенциалов решения транспортной задачи - шаг 1.
Описанную ниже последовательность действий будем повторять несколько раз, с каждым шагом приближаясь к оптимальному решению. Начнем с проверки опорного плана на оптимальность.

Выпишем **матрицу стоимостей**, $C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ в условии задачи.

Пункты отправления	Пункты назначения				
	B1	B2	B3	B4	Запасы
A1	4	3	5	6	100
A2	8	2	4	7	200
Потребности	50	100	75	75	

Далее строим рядом две таблицы. Размерность таблиц как и в матрице стоимостей: количество строк = количеству складов, количество столбцов = количеству магазинов.
Заполняем первую — левую таблицу в соответствии с полученным опорным планом.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

Переходим в правую таблицу.
Переносим из матрицы стоимостей значения, которые соответствуют занятым клеткам левой таблицы.
В матрице стоимости эти значения подчеркнуты.

$$C = \begin{pmatrix} \underline{4} & \underline{3} & 5 & 6 \\ 8 & \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \end{pmatrix}$$

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3		
	2	4	7

Припишем каждой строке правой таблице потенциалы u_1, u_2. Каждому столбцу — потенциалы v_1, v_2, v_3, v_4.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	v_4	

Для вычисления этих потенциалов в некоторых учебниках составляют систему и из нее определяют неизвестные (покажу на данном шаге).
Мы будем определять значения потенциалов непосредственно из правой таблицы.
Составим систему уравнений по следующему правилу:
Каждое из значений в ячейке (правая таблица) равно сумме потенциалов соответствующей строки и соответствующего столбца.
Например: значение 4 находится в 1-й строке и 1-м столбце. Тогда сумма потенциалов 1-й строки (u_1) и 1-ого столбца(v_1) равна 4.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	v_4	

Первое уравнение системы: $u_1 + v_1 = 4$
Рассмотрим следующее значение таблицы.
Значение 3 находится в первой строке (потенциал u_1), втором столбце (потенциал v_2).

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	v_4	

Второе уравнение системы: $u_1 + v_2 = 3$
Аналогично для каждого значения таблицы составим уравнение.
Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4 \\ u_1 + v_2 = 3 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = 4 \\ u_2 + v_4 = 7 \end{cases}$$

Для того, чтобы система имела единственное решение, примем значение одного из потенциалов равным нулю.

Для удобства в качестве этого потенциала всегда будем брать v_4.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	0	

Тогда система уравнений будет выглядеть:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_2=3 \\ u_2+v_2=2 \\ u_2+v_3=4 \\ u_2+0=7 \end{cases}$$

Решим систему уравнений и получим значения потенциалов:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_2=3 \\ u_2+v_2=2 \\ u_2+v_3=4 \\ u_2+0=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1+v_2=3 \\ 7+v_2=2 \\ 7+v_3=4 \\ u_2=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1+v_1=4 \\ u_1-5=3 \\ v_2=-5 \\ v_3=-3 \\ u_2=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8+v_1=4 \\ u_1=8 \\ v_2=-5 \\ v_3=-3 \\ u_2=7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1=-4 \\ u_1=8 \\ v_2=-5 \\ v_3=-3 \\ u_2=7 \end{cases}$$

Наглядно:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
–4	–5	–3	0	

Так как система очень проста, то значения потенциалов можно получить и устно.
Покажем подробно:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	u_2
v_1	v_2	v_3	0	

+

Сумма отмеченных потенциалов равна 7, следовательно, потенциал $u_2 = 7$

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	7
v_1	v_2	v_3	0	

+

Значение 4 базисной ячейки находится во 2-й строке, 3-м столбце, тогда рассмотрим сумму соответствующих потенциалов.

$v_3 + 7 = 4$ откуда $v_3 = -3$

Далее все аналогично:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	7
v_1	v_2	-3	0	+

Значение 2 равно сумме потенциалов 2-й строки и 2-го столбца:
$2 = v_2 + 7$ откуда $v_2 = -5$

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			u_1
	2	4	7	7
v_1	-5	-3	0	+

$u_1 - 5 = 3$, откуда $u_1 = 8$

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
v_1	-5	-3	0	+

$v_1 + 8 = 4$, откуда $v_1 = -4$
В итоге получили:

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3			8
	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Далее приступим к заполнению пустых ячеек (свободные ячейки) правой таблицы. Свободные ячейки подчиняются тому же правилу суммирования потенциалов.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3	5	8	8
3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Вычислим оценочную матрицу, по которой узнаем, оптимален ли рассматриваемый план.
Из каждого элемента матрицы стоимостей вычтем соответствующий элемент правой таблицы:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

4	3	5	8
3	2	4	7

4	3	5	8
3	2	4	7

Получили оценочную матрицу. Заметим, что в базисных ячейках всегда получим нули.
Согласно критерию оптимальности, решение выше не оптимально, так как в оценочной таблице присутствует отрицательное значение.
Получили оценочную матрицу. Заметим, что в базисных ячейках всегда получим нули.
Критерий оптимальности:
если в оценочной матрице нет отрицательных элементов, то решение оптимально, в противном случае решение не оптимально.

0	0	0	-2
5	0	0	0

Дабы не загромождать решение множеством таблиц, оценочная матрица в нашем решении будет "вписана" в правую таблицу.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		
A2		50	75	75

4	3	0 5	-2 8	8
5 3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Подчеркнутые значения - базисные ячейки, как сказано выше, значения оценочной матрицы в базисных ячейках равны нулю, нули писать не будем. Выделенные значения - значения оценочной матрицы в свободных ячейках, среди них ищем отрицательные значения.

Для перехода к следующему опорному решению выполним следующее (построим цикл пересчета):

- найдем среди отрицательных значений оценочной матрицы максимальный по модулю (или по другому, минимальный среди отрицательных)
- в соответствующей ячейке левой таблицы ставим знак " + "

В нашем примере наименьшее отрицательное значение -2.

Знак " + " ставим в ячейке 1-й строки, 4-го столбца левой таблицы - ячейка соответствующая значению (-2).

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		+
A2		50	75	75

4	3	0 5	-2 8	8
5 3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Необходимо расставить чередующиеся значения "+ " и " — " в левой таблице так, чтобы получился замкнутый цикл и выполнялись правила:

- остальные знаки цикла (все кроме уже поставленного первого " + ") ставим только в заполненных (базисных) ячейках таблицы,
- если в строке есть "плюс" ("минус"), то в этой строке должен быть и "минус" ("плюс"),
- если в столбце есть " плюс" ("минус"), то в этом столбце должен быть и "минус" ("плюс").

Применим к нашей таблице:

В столбце B_4 есть "плюс", следовательно в этом столбце должен быть и "минус".

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50		+
A2		50	75	75 -

4	3	0 5	-2 8	8
5 3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Аналогично, в строке A_2 есть "минус", следовательно должен быть и "плюс".

Если мы поставим этот "плюс" в столбце B3, то цепочка порвется, так как в этом же столбце невозможно поставить "минус" — нет заполненной ячейки.

Ставим " + " в столбце B2 и продолжаем чередовать знаки.

	B1	B2	B3	B4
A1	50	50 -		+
A2		50 +	75	75 -

4	3	0 5	-2 8	8
5 3	2	4	7	7
-4	-5	-3	0	

Получили замкнутый цикл чередующихся знаков. Цикл пересчета найден!

Далее обратимся к ячейкам, содержащим "минусы". Среди значений этих ячеек найдем минимальное: Δ = мин {50;75} = 50
К "плюсам" прибавим найденное Δ = 50, в ячейках с "минусами" — вычтем Δ = 50.
Ячейка, в которой находилось значение Δ = 50 останется пустой. В ячейке в которой мы поставили первый плюс появится значение, равное Δ = 50.
Общее количество заполненных (базисных) ячеек при пересчете не должно изменится!
Получили следующий опорный план:

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

Вычислим стоимость перевозки на первом шаге.
Для этого найдем сумму произведений значений опорного плана и матрицы стоимостей.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

$$C = \begin{pmatrix} \underline{4} & 3 & 5 & \underline{6} \\ 8 & \underline{2} & \underline{4} & \underline{7} \end{pmatrix}$$

$S_1 = 50 \cdot 4 + 100 \cdot 2 + 75 \cdot 4 + 25 \cdot 7 + 50 \cdot 6 = 1275$
На первом шаге решения транспортной задачи получили опорный план:

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

Общая стоимость перевозки S_1 = 1275

Метод потенциалов — шаг 2

Алгоритм проверки плана на оптимальность и построение цикла пересчета очень подробно расписан в шаге 1.
Далее решение задачи будем излагать менее детально.
Для полученного опорного решения строим вспомогательную — правую таблицу и заполняем значениями из матрицы стоимостей базисные ячейки.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4			6
	2	4	7
			0

Вычисляем потенциалы строк и столбцов:

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4			6	6
	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

По правилу суммирования соответствующих потенциалов, заполняем свободные ячейки.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4	1	3	6	6
5	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

Вычисляем оценочные значения в свободных ячейках.
Для этого из значений матрицы стоимостей вычитаем найденные значения соответствующих свободных ячеек.

	B1	B2	B3	B4
A1	50			50
A2		100	75	25

4	2 1	2 3	6	6
3 5	2	4	7	7
-2	-5	-3	0	

Среди оценочных значений нет отрицательных, следовательно план перевозки оптимален.
Получили оптимальный план. Итоговая стоимость перевозки $S_1 = 1275$

Задания для практического занятия:

В городе имеются два склада муки и два хлебозавода. Ежедневно с первого склада вывозится $y_1 = 100$т муки, со второго $y_2 = 140$т. Эта мука доставляется на хлебозаводы, причём первый завод получает $y_3 = 80$т, а второй $y_4 = 160$т.
Допустим, что перевозка одной тонны муки с первого склада на первый завод стоит 1,2 р., с первого склада на второй завод – 1,6 р., со второго склада на первый завод – 0,8 р. и со второго склада на второй завод – 1 р.
Как нужно спланировать перевозки, чтобы стоимость их была минимальной?

Контрольные вопросы

1. Что такое транспортная задача?
2. Что представляет собой математическая модель транспортной задачи?
3. В чем состоит метод минимального элемента решения транспортной задачи?
4. Как используется распределительный метод

Список рекомендуемой литературы:

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018

Практическое занятие №13. Применение графов для решения задач
количество часов 1

научиться строить различные виды представления графа, решать задачи с использование теории графов.

Задача: закрепить полученные знания и навыки, научиться применению полученных навыков на практике

Перечень средств, используемых при выполнении работы или оборудование :
тетрадь для практических работ, ручка, методические рекомендации по выполнению работы, калькулятор.

Вопросы для повторения, закрепления теоретического материала к практическому занятию

Графом в математике называется конечная совокупность точек, именуемых вершинами; некоторые из них соединены друг с другом линиями, называемыми **ребрами** графа **(рис. 4)**.

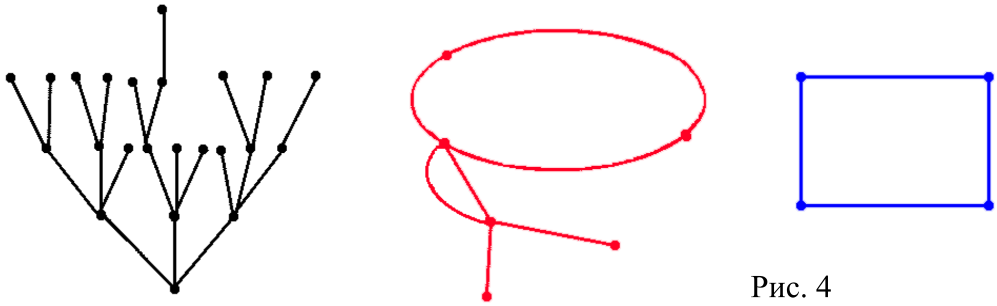


Рис. 4

С дворянским титулом «граф» их связывает общее происхождение от латинского слова «графио» - пишу.

Примерами графов могут служить схемы авиалиний, дорог, электросхемы, чертежи многоугольников. Хорошо знакомый всем образец графа – схема новосибирского метро. Вершины – конечные станции и станции пересадок, ребра – пути, соединяющие эти станции [Приложение 1].

Использует графы и дворянство. Например, в генеалогическом дереве, вершины – члены рода, а связывающие их отрезки – отношения родственности. В качестве примера генеалогическое дерево великого русского поэта А.С.Пушкина [Приложение 2].

Первая работа по теории графов принадлежит Леонарду Эйлеру (1736 год)**,** где он описывал решения головоломок и математических развлекательных задач. Широкое развитие теория графов получила с 50-х гг. XX в. в связи со становлением кибернетики и развитием вычислительной техники.

Термин «граф» впервые ввел в 1936 году венгерский математик Денеш Кениг**.**

Схема графа на **рисунке 5**, состоящая из «изолированных» вершин, называется **нулевым графом.**

Графы, в которых не построены все возможные ребра, называются **неполными графами (рис.6)**.

Графы, в которых построены все возможные ребра, называются **полными графами.** Этому определению соответствует граф на **рисунке** 7.

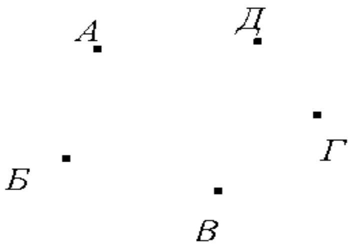


рис. 5

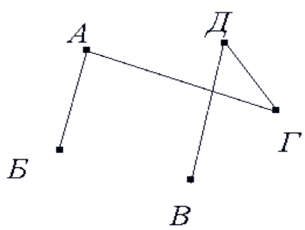


рис.6

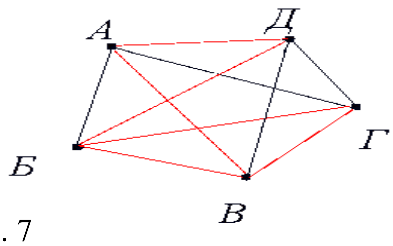


рис. 7

Граф называется **связным**, если любые две его вершины могут быть соединены последовательностью рёбер так, что каждое следующее ребро начинается в конце предыдущего, что показано на **рисунке 8**.

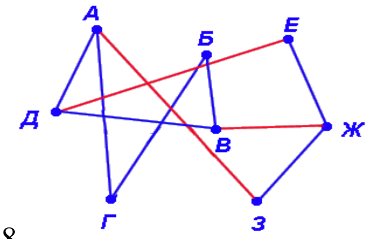


рис. 8

называется **несвязным,** если первое условие не выполняется **(рис.9)**.

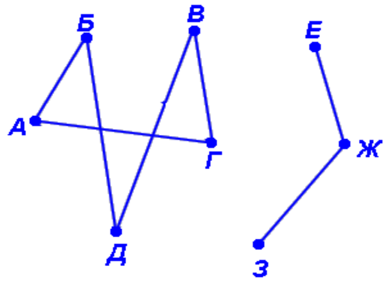
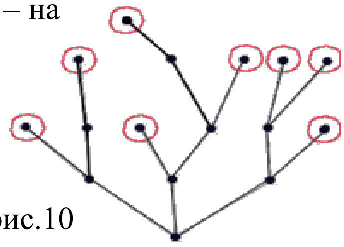


рис.9

Если, например, между вершинами Д и Е провести ребро, то граф станет связным. Такое ребро в теории графов (после удаления, которого граф из связного превращается в несвязный) называется **мостом**.

Граф, в котором две любые вершины соединены ровно одним простым путём, является **деревом (рис.10).** Чаще всего они встречаются при составлении родословных. Трехмерной моделью графа-дерева служит, например, настоящее дерево с его замысловато разветвленной кроной; река и ее притоки также образуют дерево, но уже плоское – на поверхности земли.



После удаления любого ребра дерева, оно «распадается» на два дерева. Кружком обведены **висячие вершины**.

рис.10

Свойства деревьев:

1. Чтобы простой связный граф был деревом, необходимо и достаточно, чтобы число вершин было больше числа ребер на один. 2. Чтобы граф был деревом, необходимо и достаточно, чтобы любые две вершины его соединялись единственным маршрутом.
3. Граф будет деревом тогда и только тогда, когда добавление любого нового ребра приводит к появлению ровно одного цикла.

Граф, который можно нарисовать так, чтобы его рёбра не пересекались нигде, кроме вершин, называются **плоским (рис.11)**.

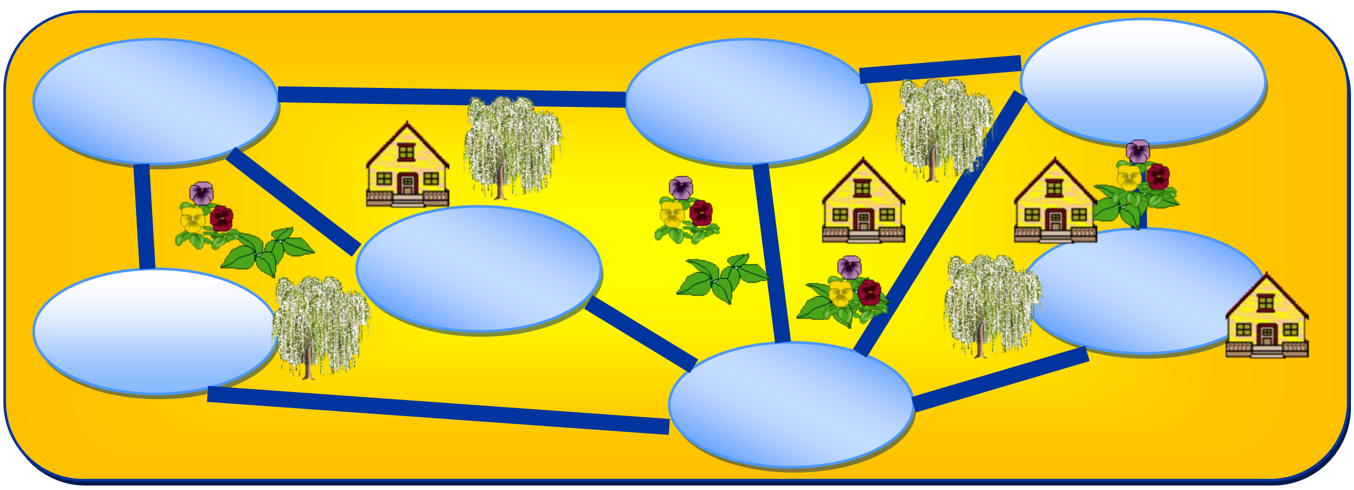


рис.11

Плоские графы обладают многими интересными свойствами. Так, Эйлер обнаружил простую связь между количеством вершин (В), количеством ребер (Р) и количеством частей (Г), на которые граф разделяет плоскость:

В–Р+Г=2.

В качестве примера можно рассмотреть следующую *задач*у:

В стране «Озерной» - 7 озер,
Каналы их соединяют.
А между ними – острова,
И сколько их – никто не знает. [13, 276]

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины соответствуют островам, а рёбра — каналам. Полученный граф будет плоским и связным, значит, для него выполняется формула Эйлера: В — Р + Г = 2. Для нашего графа В = 7, Р = 10. Подставляя в формулу, получаем 7 — 10 + Г = 2. Отсюда следует, что Г = 5, то есть, рёбра графа разбивают плоскость на 5 частей. Островам соответствуют все грани, кроме внешней (она бесконечно большая во все стороны и острову соответствовать не может), значит, их **4**.

Понятия плоского графа и грани графа применяется при решении задач на "правильное" раскрашивание различных карт.

Большой интерес вызывают графы, которые можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Их называют **эйлеровыми** в честь учёного Леонарда Эйлера **(рис.12)**.

рис.12

Такой путь существует лишь в том случае, если граф – связный т. е. от каждой его вершины к каждой другой можно пройти по ребрам графа и из каждой вершины, кроме, может быть, двух, выходит четное число ребер.

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называется **степенью вершины**. Вершина графа, имеющая нечётную степень, называется **нечетной,** а чётную степень – **чётной.**

На **рисунке 13:** Ст.А = 1, Ст.Б = 2, Ст.В = 3, Ст.Г= 2, Ст.Д= 0.

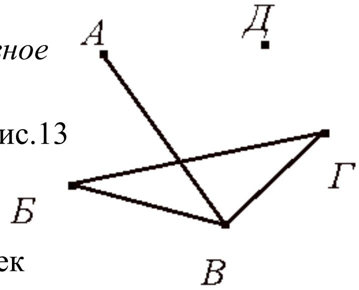


рис.13

В графе сумма степеней всех его вершин — число четное, равное удвоенному числу ребер графа, так как каждое ребро участвует в этой сумме ровно два раза. Этот результат, известный еще двести лет назад Эйлеру, часто называют **леммой о рукопожатиях**. Из нее следует, что если несколько человек обменялись рукопожатиями, то общее число пожатых рук обязательно четно, ибо в каждом рукопожатии участвуют две руки (при этом каждая рука считается столько раз, сколько она участвовала в рукопожатиях). Число нечетных вершин любого графа четно. Во всяком графе с вершинами, где, всегда найдутся, по меньшей мере, две вершины с одинаковыми степенями. [20, 146]

Если степени всех вершин графа равны, то граф называется **однородным.** Таким образом, любой полный граф — однородный. Соединив А с Б и А с Д получим полный, однородный граф.

Итак, мы рассмотрели основные определения теории графов, без которых было бы невозможно доказательство теорем, а, следовательно, и решение задач.

ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ ГРАФОВ

Знаменитые задачи

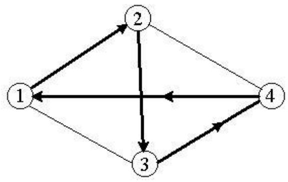
Задача коммивояжера

Задача коммивояжера является одной из знаменитых задач теории комбинаторики. Она была поставлена в 1934 году, и об неё обламывали зубы лучшие математики.

Постановка задачи следующая. Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города, посетить по разу в неизвестном порядке города 2,1,3..n и вернуться в первый город. Расстояния между городами известны. В каком порядке следует обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?

Метод решения задачи коммивояжера

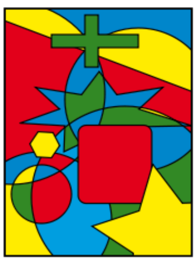
Жадный алгоритм “иди в ближайший (в который еще не входил) город”. “Жадным” этот алгоритм назван потому, что на последних шагах приходится жестоко расплачиваться за жадность. Рассмотрим для примера сеть на рисунке, представляющую узкий ромб. Пусть коммивояжер стартует из города 1. Алгоритм “иди в ближайший город” выведет его в город 2, затем 3, затем 4; на последнем шаге придется платить за жадность, возвращаясь по длинной диагонали ромба. В результате получится не кратчайший, а длиннейший тур.



Проблема четырёх красок

Выяснить, можно ли всякую расположенную на сфере карту раскрасить четырьмя красками так, чтобы любые две области, имеющие общий участок границы, были раскрашены в разные цвета.

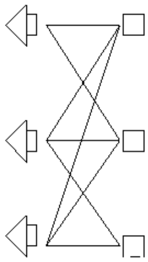
К. Аппель и В. Хакен (используя компьютер) доказали в 1976 г., что так можно раскрасить любую карту.

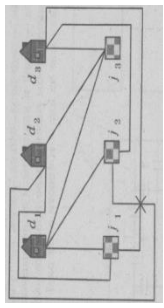


Задача о трёх домиках и трёх колодцах

Три соседа имеют три общих колодца. Можно ли провести непересекающиеся дорожки от каждого дома к каждому колодцу?

Для решения этой задачи воспользуемся теоремой, доказанной Леонардом Эйлером в 1752 г. Если многоугольник разбит на конечное число многоугольников так, что любые два многоугольника разбиения или не имеют общих точек, или имеют общие вершины, или имеют общие ребра, то имеет место равенство : *В- Р + Г=1,* где *В* — общее число вершин, *Р* — общее число ребер, *Г* — число многоугольников (граней).



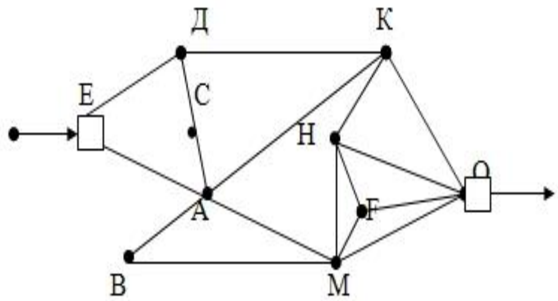


Решение. Предположим, что это можно сделать. Отметим домики точками Д,, Д2, Д3, а колодцы — точками *К1, К2, К3*. Каждую точку-домик соединим с каждой точкой-колодцем. Получим девять ребер, которые попарно не пересекаются. Эти ребра образуют на плоскости многоугольник, разделенный на более мелкие многоугольники. Поэтому для этого разбиения должно выполняться соотношение Эйлера *В - Р + Г* = 1. Добавим к рассматриваемым граням еще одну — внешнюю часть плоскости. Тогда соотношение Эйлера примет вид *В - Р + Г* = 2, причем *В* — 6 и *Р* = 9. Следовательно, *Г* = 5. Каждая из пяти граней имеет по крайней мере четыре ребра, поскольку по условию задачи ни одна из дорожек не должна непосредственно соединять два дома или два колодца. Так как каждое ребро лежит ровно в двух гранях, то количество ребер должно быть не меньше 5*4:2=10, что противоречит условию, по которому их число равно 9. Полученное противоречие показывает, что нельзя провести непересекающиеся дорожки от каждого домика к каждому колодцу.

2.2. Несколько интересных задач

"Маршруты"

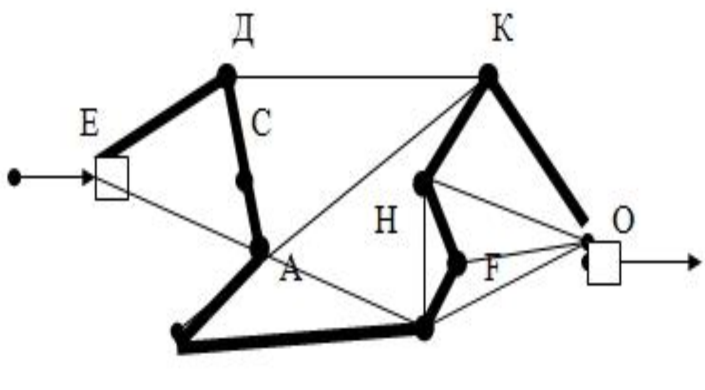
Задача 1



Как вы помните, охотник за мертвыми душами Чичиков побывал у известных помещиков по одному разу у каждого. Он посещал их в следующем порядке: Манилова, Коробочку, Ноздрева, Собакевича, Плюшкина, Тентетникова, генерала Бетрищева, Петуха, Констанжолго, полковника Кошкарева. Найдена схема, на которой Чичиков набросал взаимное расположение имений и проселочных дорог, соединяющих их. Установите, какое имение кому принадлежит, если ни одной из дорог Чичиков не проезжал более одного раза.

Решение:

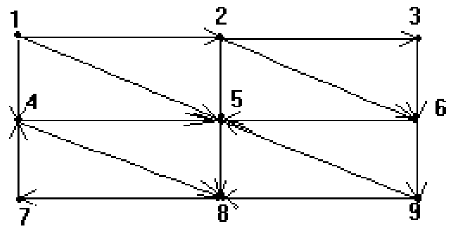
По схеме дорог видно, что путешествие Чичиков начал с имения Е, а окончил имением О. Замечаем, что в имения В и С ведут только две дороги, поэтому по этим дорогам Чичиков должен был проехать. Отметим их жирной линией. Определены участки маршрута, проходящие через А: АС и АВ. По дорогам АЕ, АК и АМ Чичиков не ездил. Перечеркнем их. Отметим жирной линией ED ; перечеркнем DK . Перечеркнем МО и МН; отметим жирной линией MF;



перечеркнем FO; отметим жирной линией FH, HK и KO. Найдем единственно возможный при данном условии маршрут. И получаем: имение E – принадлежит Манилову, D- Коробочке, C – Ноздреву, A – Собакевичу, B – Плюшкину, M – Тентетникову, F - Бетрищеву, H – Петуху, K – Констанжолго, O – Кошкареву**.**

Задача 2

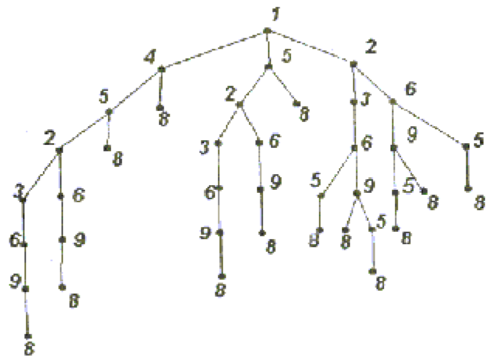
На рисунке изображена схема местности.



Передвигаться можно только в направлении стрелок. В каждом пункте можно бывать не более одного раза. Сколькими способами можно попасть из пункта 1 в пункт 9? Какой маршрут самый короткий и какой — самый длинный.

Решение:

Последовательно "расслаиваем" схему в дерево, начиная с вершины 1. Получим дерево. Число возможных способов попадания из 1 в 9 равно числу "висячих" вершин дерева (их 14). Очевидно, кратчайший путь-1-5-9; самый длинный - 1-2-3-6-5-7-8-9.



"Группы, знакомства"

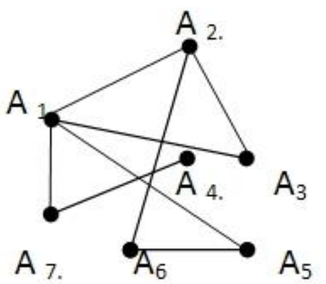
Задача 1

Участники музыкального фестиваля, познакомившись, обменялись конвертами с адресами. Докажите, что:

а) всего было передано четное число конвертов;

б) число участников, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четно.

Решение: Пусть участники фестиваля A_1, A_2, A_3 . . . , A_n – вершины графа, а ребра соединяют пары вершин, изображающих ребят, обменявшихся конвертами.



Решение:

а) степень каждой вершины A_i показывает число конвертов, которое передал участник A_i своим знакомым. Общее число переданных конвертов N равно сумме степеней всех вершин графа N = степ. A_1 + степ. A_2 + + . . . + степ. A_{n-1} + степ. A_n , N=2p, где p – число ребер графа, т.е. N – четное. Следовательно, было передано четное число конвертов;

б) в равенстве N = степ. A_1 + степ. A_2 + + . . . + степ. A_{n-1} + степ. A_n сумма нечетных слагаемых должна быть четной, а это может быть только в том случае, если число нечетных слагаемых четно. А это означает, что число участников, обменявшихся конвертами нечетное число раз, четное.

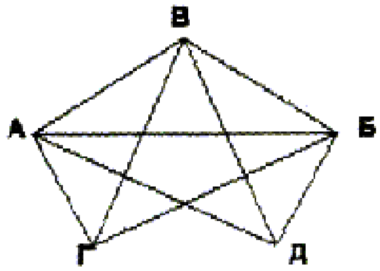
Задача 2

Однажды Андрей, Борис, Володя, Даша и Галя договорились вечером пойти в кино. Выбор кинотеатра и сеанса они решили согласовать по телефону. Было также решено, что если с кем-то созвониться не удастся, то поход в кино отменяется. Вечером у кинотеатра собрались не все, и поэтому посещение кино сорвалось. На следующий день стали выяснять, кто кому звонил. Оказалось, что Андрей звонил Борису и Володе, Володя звонил Борису и Даше, Борис звонил

Андрею и Даше, Даша звонила Андрею и Володе, а Галя звонила Андрею, Володе и Борису. Кто не сумел созвониться и поэтому не пришёл на встречу?

Решение:

Нарисуем пять точек и обозначим их буквами А, Б, В, Г, Д. Это первые буквы имён. Соединим те точки, которые соответствуют именам созвонившихся ребят.



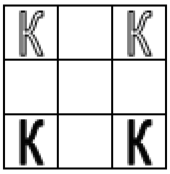
Из рисунка видно, что каждый из ребят – Андрей, Борис и Володя - созвонились со всеми остальными. Поэтому эти ребята и пришли к кинотеатру. А Галя и Даша не сумели созвониться между собой (точки Г и Д не соединены отрезком) и поэтому в соответствии с договорённостью в кино не пришли.

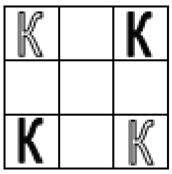
Алгоритм решения задач при помощи графов

- проанализировать условие задачи;
- определить, что известно;
- составить граф:
- проанализировать граф, найти все возможные решения или доказать, что их нет.

Задания для практического занятия:

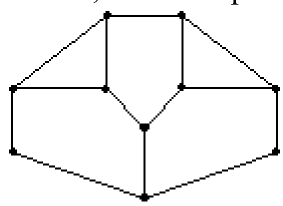
1. На квадратной доске 3х3 расставлены 4 коня так, как показано на рис.1. Можно ли сделав несколько ходов конями, переставить их в положение, показанное на рис.2?





2. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9 ?
3. В государстве 100 городов к из каждого города выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве.
4. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 человек имеют по 3 друга, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей ?
5. У короля 19 вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассала 1, 5 или 9 соседей?
6. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
7. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
8. В стране из каждого города выходит 100 дорог и из каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться до любого другого.
9. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту розно 1 раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист

а) не с него начал и не на нем закончил?
б) с него начал, но не на нем закончил?
в) с него начал и на нем закончил?
10. На рисунке изображен парк, разделенный на несколько частей заборами. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перелезть через каждый забор розно 1 раз?



Контрольные вопросы
1. Дайте определение графа.
2. Сформулируйте понятие смежных ребер.
3. Дайте определение правильного графа.
4. Запишите формулу суммы степеней графа.
5. Дайте определение изолированной вершины графа

Критерии оценивания выполненных заданий

Предметом оценки служат умения и знания, предусмотренные ФГОС по учебной дисциплине

Критерии оценки:
Оценка 5 ставится, если учащийся самостоятельно выполняет работу в полном объеме, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов.
Оценка 4 ставится, если выполнены требования к оценке 5, но были допущены две-три ошибки.
Оценка 3 ставится, если в ответе имеются пробелы, не препятствующие дальнейшему усвоению материала. Работа выполнена не полностью.
Оценка 2 ставится, если студент не овладел основными знаниями в соответствии с требованиями программы и допустил много ошибок. Работа выполнена не полностью и объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов.
Оценка 1 ставится, если учащимся совсем не выполнил работу.

Информационное обеспечение выполнения практических занятий

Список рекомендуемой литературы:
Основные источники

Для преподавателей

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник. 2019 .
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. . – М. «Академия», 2018 .
3. Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2018.
4. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). – М., 2018.
5. Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). – М., 2018.
6. Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2019.
7. Погорелов А. В. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2018.
8. Смирнова И.М. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2019.

Для обучающихся

1. Башмаков М.И. Математика. Учебник – М. «Академия», 2019
2. Башмаков М.И. Математика. Задачник Учебное пособие. – М. «Академия», 2018

Дополнительные источники

Для преподавателей

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10—11 кл. 2017.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). 10-11. – М., 2018.
3. Колягин Ю.М., Ткачева М.В, Федерова Н.Е. и др. под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2018.
4. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 11 кл. – М., 2019.
5. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н. и др. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни). 10 кл. – М., 2017.
6. Шарыгин И.Ф. Геометрия (базовый уровень) 10—11 кл. – 2018.

Для обучающихся

1. Григорьев С.Г., Задулина С.В. Математика. Учебник - М., «Академия», 2017
2. Гусев В.А., Григорьев С.Г., Иволгина С.В. Математика. Учебник - М., «Академия», 2018
3. Пехлецкий И.Д. Математика. Учебник - М., «Академия», 2018

Интернет-ресурсы

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
   www.school-collection.edu.ru (Единая коллекции цифровых образовательных ресурсов